Université de Provence,

Centre de S^t–Charles, UFR MIM

Thèse

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Provence

par

Yves LACROIX

"Contribution à l'étude des suites de Tœplitz, et numération en produit infini."

Soutenue le 31 Janvier 1992 devant le jury composé des Professeurs ;

K. SCHMIDT, Président et rapporteur

B. HOST, rapporteur

J. KWIATKOWSKI, examinateur

P. LIARDET, directeur

E. PARDOUX, examinateur

Comme ni vous ni personne d'autre vous ne pouvez attendre mieux de moi, vous ne pouvez pas vous plaindre que je ne vous aie pas donné mieux.

N. Machiavel, *Nicholas Machiavel à Zanobi Buondelmonti et Cosimo Rucellai.*

Il me paraît donc que ces principes, en rendant les peuples plus débiles, les ont disposés à être plus facilement la proie des méchants.... Ces fausses interprétations, et notre mauvaise éducation, font qu'on voit aujourd'hui bien moins de républiques qu'on en voyait autrefois, et que les peuples par conséquent, ont moins d'amour pour la liberté.

N. Machiavel, *Sur la première décade de Tite-Live*, Livre Second, II.

A Michou, Rachel, Ernest, le Docteur Calvet et les extra-terrestres.

Remerciements.

Je remercie P. Liardet, Professeur à l'Université de Provence, qui a dirigé cette thèse, qui a eu la patience de répondre aux nombreuses questions que je lui ai posées, à la faculté, le jour et en soirée au téléphone.

Je remercie J. Kwiatkowski, Professeur à l'Université N. Copernicus de Torùn, qui s'est déplacé de Torùn à Marseille, qui a travaillé avec moi durant son séjour à l'URA 225 en 1991, qui a accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie B. Host, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II, Luminy, pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse, et m'avoir fait ses remarques qui ont contribué à améliorer la qualité de ce travail.

Je remercie K. Schmidt, Professeur à l'Université de Warwick, d'avoir bien voulu se déplacer de Warwick à Marseille, être Président et rapporteur de cette thèse, et d'avoir fait ses remarques qui ont contribué à améliorer la qualité d'ensemble de ce travail.

Je remercie E. Pardoux, Professeur à l'Université de Provence, qui me fait l'honneur de bien vouloir être membre du jury de cette thèse.

Je remercie F. Schweiger, Ober Universität Professor Doctor à Salzburg, pour les encouragements qu'ils m'a transmis.

Je remercie toutes les personnes que j'ai connues de près ou de loin durant ces cinq années passées à S^t−Charles et Marseille.

Je remercie mon voisin de l'immeuble d'à côté qui a bien voulu diminuer sa consommation d'alcool et étouffer les cris de sa femme.

Je remercie Marie-Antoinette qui a su tirer les choses au clair à temps.

Sommaire.

0–Introduction.

Ce travail est subdivisé en deux parties traitant de problèmes qui mettent en jeu certains aspects de la Théorie de la Mesure, de la Théorie Ergodique, de celle des Systèmes Dynamiques Topologiques et de celle de la Numération en Théorie des Nombres. Chacune des parties s'articule sur un travail de publication. La conclusion présente des perspectives de recherches et les travaux les plus récents de l'auteur.

Dans la première partie, nous présentons les flots de Tœplitz sur alphabet fini par le biais de la reproduction de [Kw-La], où un critère d'isomorphisme topologique pour ces flots est donné, et où deux applications en sont faites. Cette présentation est accompagnée d'une explication plus détaillée de l'isomorphisme topologique pour les flots associés aux suites de Morse généralisées points fixes de $(k, 2k)-$substitutions sur un alphabet à deux lettres, et de quelques résultats élémentaires concernant les flots de Tœplitz.

La deuxième partie donne la définition du développement de l'entropie selon le facteur équicontinu maximal pour les flots de Tœplitz, applique cette méthode, et montre comment de façon naturelle elle fait apparaitre des numérations en produit infini de nombres rationnels sur $[0, 1[$. Une simplification, des numérations développées, donne de tels systèmes sur $[0, 1[$, qui sont fibrés et qui généralisent le produit de Cantor. Nous reproduisons [Lac-2] où une étude métrique de base pour ces produits est réalisée.

Le fil d'Ariane est l'étude des flots de Tœplitz.

Présentons chacune de ces parties plus en détail

$\ldots/\ldots$

I–Flots de Tœplitz et isomorphisme.

Soit A un espace métrique compact, et $A^{\mathbf{Z}}$ l'ensemble des suites bi-infinies sur A, qui est compact métrique muni de la topologie produit. Pour $\mu \in A^{\mathbf{Z}}$, et $n \in \mathbf{Z}$, nous noterons $\mu(n)$ la valeur de la suite μ en n. Une suite $\gamma \in A^{\mathbf{Z}}$ est une suite de Tœplitz si et seulement si la condition suivante est vérifiée ;

$$\forall n \in \mathbf{Z},\ \exists p \in \mathbf{N}^*,\ \forall k \in \mathbf{Z},\ \gamma(n+kp) = \gamma(n).$$

Une façon plus simple d'imaginer, et de contrôler, une suite de Tœplitz, est de la voir comme limite de suites périodiques sur un alphabet comportant une lettre de plus, un "trou", noté par la suite Λ ; soit A l'alphabet, et soit $\Lambda \notin A$ une lettre supplémentaire. Soit $\bar{A} = A \cup \{\Lambda\}$. Notons A^* et $\bar{A}^*$ les monoïdes ou ensembles des mots associés. Si $B \in \bar{A}^*$, notons $\ell(B)$ sa longueur. Si $p \in \mathbf{Z}$, notons $\mathrm{Per}_p B$ la suite dans $\bar{A}^{\mathbf{Z}}$ définie par

$$\forall k \in \mathbf{Z},\ \ \mathrm{Per}_p B < p + k\ell(B), p + (k+1)\ell(B) >= B.$$

Une suite de Tœplitz non périodique est un élément ω de $A^{\mathbf{Z}}$ tel qu'il existe une suite de mots $\left(B_n\right)_{n\geq 0} \in \left(\bar{A}^*\right)^{\mathbf{Z}}$ vérifiant les conditions suivantes ;

$$(T) \qquad \begin{cases} (1): & \forall n \in \mathbf{N},\ \ \ell(B_n) = l_n \geq 2, \\ (2): & \forall n \in \mathbf{N},\ \ \dfrac{l_{n+1}}{l_n} \geq 2 \ \text{ et } \ \dfrac{l_{n+1}}{l_n} \in \mathbf{N}^*, \\ (3): & \forall n \in \mathbf{N},\ \ \forall i \in [0, l_n[,\ \ \forall u \in [0, \dfrac{l_{n+1}}{l_n}[, \\ & \qquad B_n(i) \neq \Lambda \Rightarrow B_{n+1}(i + u.l_n) = B_n(i), \\ (4): & \forall n \in \mathbf{N},\ \ \text{la plus petite période de } \ \mathrm{Per}_0 B_n \ \text{ est } \ l_n. \end{cases}$$

La suite $(l_n)_{n\geq 0}$ est alors ce que S. Williams appelle une période de structure de la suite ω, et pour tout $n \geq 0$, le l_n−squelette de la suite ω, est l'ensemble

$$\mathrm{Per}_{l_n}(\omega) = \{\ p \in \mathbf{Z},\ \ \mathrm{Per}_0 B_n(p) \neq \Lambda\ \}\,.$$

Nous munissons l'espace $A^{\mathbf{Z}}$ du shift à gauche S,

$$\left(S(\gamma)\right)(n) = \gamma(n+1),\ n \in \mathbf{Z},\ \gamma \in A^{\mathbf{Z}},$$

qui est un homéomorphisme de l'espace dans lui-même et qui fait de la paire $(A^{\mathbf{Z}}, S)$ un système dynamique topologique. Lorsque A est fini et muni de la topologie discrète, si $\#A = k$, le flot $(A^{\mathbf{Z}}, S)$ est appelé le flot symbolique à k symboles.

Le flot associé à un élément μ de $A^{\mathbf{Z}}$ est par définition la paire $(\Theta(\mu), S)$ où $\Theta(\mu)$ est la fermeture de l'orbite $O(\mu)$ de μ sous l'action du shift S $(O(\mu) = \{ \ S^k\mu, \ k \in \mathbf{Z} \ \})$.

En 1955, Gottschalk et Hedlund déterminent la minimalité du flot associé aux éléments régulièrement quasi périodiques du flot symbolique à k symboles ([Go-He]). Ce n'est que plus tard, en 1969, que Jacobs et Keane appellerons ces éléments des suites de Tœplitz, appellation qui leur est désormais acquise ([Ja-Ke]).

Ils introduisent la notion de régularité d'une suite de Tœplitz, et montrent que toute suite de Tœplitz régulière est limite quasi-uniforme de suites périodiques, ce qui entraine la stricte ergodicité du flot associé. Ils identifient, dans le cas régulier, le spectre discret associé au flot, qui est purement rationnel.

Dans cette voie, en 1988, Downarowicz et Iwanik étudient avec la notion de quasi-uniforme convergence, le comportement topologique des suites de Tœplitz. Ils montrent que le nombre de mesures ergodiques invariantes ainsi que l'entropie topologique n'augmentent pas par passage à une limite quasi-uniforme ([Do-Iw]).

En 1991, T. Downarowicz ([Dow]) montre que l'ensemble compact métrique des mesures invariantes d'un système dynamique topologique peut toujours être réalisé comme celui d'un flot de Tœplitz sur l'alphabet $\{0, 1\}$.

En 1960 ([El-Go]), la notion de facteur équicontinu maximal est introduite par Ellis et Gottschalk. Ce facteur est un groupe monothétique compact.

M.E. Paul, en 1976 ([Pau]), étudie les flots symboliques du point de vue de la nature de leur facteur équicontinu maximal. Il montre en particulier que les flots de Tœplitz sont exactement les flots symboliques dont le facteur équicontinu maximal est un groupe monothétique compact 0-dimensionnel, c'est à dire une "(ℓ_t)-adic adding machine" (voir [He-Ro]). Il donne un critère simple d'identification du facteur équicontinu maximal d'un flot topologique, utilisé plus tard par S.Williams ([Wil]) pour construire ce facteur pour un flot de Tœplitz.

Avec N. Markley, en 1979 ([Ma-Pa]), il montre que, pour la topologie de $A^{\mathbf{Z}}$, l'ensemble des suites de Tœplitz, dont le flot associé est d'entropie topologique positive et non uniquement ergodique, est résiduel.

De façon constructive, S. Williams, en 1984 ([Wil]), construit des flots de Tœplitz d'entropie arbitraire ou de nombre de mesures ergodiques invariantes arbitraire. Néanmoins, le contrôle simultané de ces deux quantités n'est pas toujours réalisé. Elle donne quelques informations générales sur la constitution du point de vue métrique des flots de Tœplitz et retrouve le résultat initial de Jacobs et Keane en montrant qu'un flot de Tœplitz régulier est métriquement isomorphe à son facteur équicontinu maximal.

Dans [Bu-Kw-1], en 1991, W. Bulatek et J. Kwiatkowski montrent qu'il existe des flots de Tœplitz d'entropie arbitrairement grande et strictement ergodiques. Les constructions données utilisent des résultats de C. Grillenberger (1972, [Gri]) et un procédé de construction des flots "par blocs", employé déjà par J.C. Oxtoby ([Oxt]) et S. Williams. Les flots obtenus par ce procédé sont de centralisateur topologique trivial.

Dans [Bu-Kw-2] (1991), les mêmes auteurs construisent des flots de Tœplitz réguliers topologiquement coalescents, et dont les Z_2-extensions le sont, et sont minimales. Les éléments des centralisateurs topologiques associés sont décrits.

En 1991, T. Rojek ([Roj-1]) donne une description de l'isomorphisme topologique et finitaire pour une sous classe de Z_2-extensions de flots de Tœplitz, et construit dans cette classe une famille non dénombrable de Z_2-extensions de flots de Tœplitz dont deux quelconques éléments distincts sont métriquement mais non finitairement isomorphes.

En 1992, J. Kwiatkowski et Y. Lacroix ([Kw-La]) donnent un critère pour l'isomorphisme topologique des flots de Tœplitz, construisent une famille non dénombrable de flots de Tœplitz strictement ergodiques, de mêmes entropie topologique et facteur équicontinu maximal arbitraires, dont deux éléments distincts sont non topologiquement isomorphes. Ils étudient la disjonction topologique des flots de Tœplitz, et donnent une description partielle de l'isomorphisme topologique dans la classe des suites de Morse généralisées qui sont points fixes de $(k, 2k)$ substitutions sur Z_2.

La partie "suites de Tœplitz et isomorphisme" d'abord reproduit [Kw-La], puis donne des détails sur la classification topologique pour les suites de Morse généralisées points fixes de $(k, 2k)-$substitutions sur Z_2 (contenue dans [Kw-La]), donne un critère de stricte ergodicité pour les flots de Tœplitz, donne une étude de l'isomorphisme métrique pour les flots construits, et enfin donne quelques informations sur l'entropie topologique d'un flot de Tœplitz.

II–Produits de Cantor généralisés.

Le titre de cette partie désigne une extension naturelle des travaux effectués au cours des recherches préliminaires sur la possibilité de construire des flots de Tœplitz strictement ergodiques et d'entropie arbitraire.

Un moyen de contrôle de l'entropie d'un flot de Tœplitz de facteur équicontinu maximal donné est développé. Ce procédé est désigné sous le nom de "développement de l'entropie selon le facteur équicontinu maximal".

En application de ce procédé, des flots de Tœplitz sont construits, d'entropie topologique et de facteur équicontinu maximal arbitraires, pour lesquels il est prouvé qu'ils admettent le continuum de mesures ergodiques invariantes, et qui revêtent une forme métrique fibrée explicite (comme décomposition en produit croisé au-dessus du facteur équicontinu maximal, dont l'existence est prouvée dans [Roh]). Cette famille est non dénombrable.

Dans ce développement interviennent des numérations en produit infini de nombres rationnels, et des simplifications de celles-ci, qui consistent à ne pas tenir compte du facteur équicontinu maximal, font apparaître des systèmes de numération qui sont des cas particuliers des produits de Cantor généralisés construits par Oppenheim ([Opp]).

La théorie des systèmes fibrés de numération est développée dans [Sch] par F. Schweiger, et les catégories principales constituées de tels systèmes sur $[0, 1[$ s'y trouvent. Il est possible d'observer qu'une certaine sous-classe des généralisations données par Oppenheim est constituée de systèmes fibrés, sur $[0, 1[$, pour le développement en produit infini de nombres rationnels.

Les éléments de cette sous-classe ne rentrent dans aucune des catégories identifiées jusqu'à ce jour pour les systèmes fibrés ; c'est pourquoi il nous a semblé intéressant de développer la théorie métrique de base pour ces produits, c'est-à-dire l'étude des mesures invariantes et de leur ergodicité, ainsi que celle de l'uniforme distribution, pour la répartition des itérés d'un point dans ses cylindres de rang 1 successifs, une fois ramenés à l'intervalle $[0,1[$ par transformation barycentrique.

Ceci est fait dans [Lac], que nous présentons à la fin de cette partie, et où les résultats constituent deux "blocs" ; le premier donne toutes les mesures finies ergodiques invariantes, les $\sigma-$finies invariantes continues pour la mesure de Lebesgue $\|ambda$ sur $[0,1[$, et la non ergodicité pour celles qui sont équivalentes à λ ; le second donne une suite de variables aléatoires $(t_n(.))_{n\geq 0}$ uniformément et identiquement distribuées sur $[0,1[$, telle que pour presque tout $x \in [0,1[$, pour tout entier $p \geq 0$, la suite $\big(t_n(x),\dots,t_{n+p}(x)\big)_{n\geq 0}$ est uniformément distribuée dans $[0,1]^{p+1}$. En conséquence, $\lambda-$p.p, la suite $\big(t_n(x)\big)_{n\geq 0}$ est $\lambda-$complètement uniformément distribuée dans $[0,1]$ (voir [Ku-Ni]).

D'un point de vue arithmétique, le produit infini de Cantor est développé par O.Perron dans [Per], et a été étudié et généralisé par Sierpinski ([Sie-1] et [Sie-2]), Oppenheim ([Opp]), Escott ([Esc]), Lotockiî ([Lot]), Fine ([Fin]), Knopfmacher et Knopfmacher ([Kn-Kn]), Mendes-France et Van der Poorten ([MeFr-VdP]), et Ostrowski ([Ost]).

De ce point de vue, nous nous limitons ici à mentionner le fait que P. Stambul ([Sta]) et A. Thomas ([Tho]) ont obtenu des résultats nouveaux, dans le cadre du problème de Cantor et Engel, cité dans [MeFr-VdPo], à savoir la reconnaissance des irrationnels quadratiques au niveau de la suite de digits qui leur est associée lors de leur développement pour l'algorithme de Cantor. A. Thomas obtient une limitation de la croissance des digits, si elle est polynomiale, et P. Stambul, dans certains cas, une conservation de la norme quadratique du nombre, ce qui le mène à des croissances non polynomiales pour les digits associées à certains nombres quadratiques irrationnels.

Il est possible de donner, sur la base du modèle fibré, des généralisations du produit de Cantor, dont voici l'algorithme de développement ; soit k un nombre réel ≥ 1 ; pour tout $x \in [0,1[$, soient $r_0(x) \in \mathbf{N}^*$ et $T(x) \in [0,1[$ tels que ;

$$\frac{r_0(x)-1}{r_0(x)+k-1} \leq x < \frac{r_0(x)}{r_0(x)+k}, \quad T(x) := x.\left(\frac{r_0(x)+k}{r_0(x)}\right).$$

Si nous posons, pour tout $x \in [0,1[$, $T^n(x) = \overbrace{T \circ \cdots \circ T}^{n \text{ fois}}(x)$, et posons $r_n(x) = r_0(T^n(x))$, nous obtiendrions

$$x = \prod_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{r_i(x)}{r_i(x)+k}\right).$$

Ceux-ci, du point de vue métrique, ont un comportement trés voisin de ceux présentés dans [Lac].

Néanmoins, ces dernières généralisations nous semblent ne devoir jouer de rôle important que pour l'identification des irrationnels quadratiques.

I–Flots de Toeplitz et isomorphisme.

Dans [Kw-La], J. Kwiatkowski et Y. Lacroix donnent un critère d'isomorphisme topologique pour les flots de Tœplitz, construisent une famille non dénombrable de flots de Tœplitz de même facteur équicontinu maximal et entropie topologique arbitraires, strictement ergodiques, dont deux éléments distincts quelconques ne sont pas topologiquement isomorphes. Ils étudient la disjonction topologique pour les flots de Tœplitz, et donnent une classification topologique pour les flots associés aux suites de Morse généralisées points fixes de $(k, 2k)-$substitutions sur Z_2.

Cette première partie est centrée sur ce travail commun, que nous commençons par reproduire.

Nous donnons ensuite quelques éclaircissements sur la dernière partie de [Kw-La], ainsi qu'une application ; la classification topologique des flots de Rudin-Shapiro généralisés étudiés dans [Al-Li]. Ceci constitue le I.2.

Nous donnons ensuite un critère de stricte ergodicité d'un flot de Tœplitz, dans I.3.

Nous prouvons l'isomorphisme métrique des éléments de la famille non dénombrable construite dans [Kw-La], dans I.4.

Nous donnons enfin une majoration de l'entropie topologique d'un flot de Tœplitz en fonction de sa régularité et de la cardinalité de l'alphabet.

I.1. "[Kw-La]".

Nous reproduisons ici *A criterion for Tœplitz flows to be topologically isomorphic and applications*, de J. Kwiatkowski et Y. Lacroix, qui nous sert également d'introduction pour les notations et les constructions de base réalisées à partir d'une suite de Tœplitz, i.e., le facteur équicontinu maximal et les $t-$symboles.

Il s'agit d'un travail commun réalisé durant le séjour de J. Kwiatkowski à Marseille de Janvier à Juillet 1991, Professeur invité au CNRS, URA 225.

Il est difficile aprés 6 mois de faire la part exacte de la contribution de chacun. Une famille non dénombrable de flots de Tœplitz, strictement ergodiques, d'entropie et de facteur équicontinu maximal arbitraires, dont deux éléments distincts ne sont pas topologiquement isomorphes, a été présentée par Y. Lacroix, au séminaire de Théorie des Nombres de la Faculté S^t–Charles, en Avril 1991. La disjonction topologique a été entreprise par Y. Lacroix également. Certaines corrections lui sont dues aussi. Le temps passé en commun n'est pas divisible dans la mesure où les deux auteurs ont été actifs. Certainement, nous n'aurions pas été aussi loin sans l'expérience et les connaissances de J. Kwiatkowski

.../...

A CRITERION FOR TOEPLITZ FLOWS TO BE TOPOLOGICALLY ISOMORPHIC AND APPLICATIONS.

by

J. KWIATKOWSKI[(1)] and **Y. LACROIX**[(2)]

Abstract. We give a criterion for topological isomorphism of Toeplitz flows. An uncountable family of pairwise topologically non-isomorphic strictly ergodic Toeplitz flows, having the same arbitrary entropy and maximal equicontinuous factor, is constructed. A topological invariant is given for generalized Morse sequences considered as fixed points of substitutions of constant length.

KEYWORDS : Toeplitz flows, Morsesequences.

CLASSIFICATIONS : 54H20, 34C35, 28D20.

(1) Institute of Mathematics, Nicholas Copernicus University, al. Chopina 12/18, 87 - 100 Torin, Poland. This research was made during the stay of the first author at Marseille URA 225 CNRS.

(2) Université Aix-Marseille I, UFR-MIM, 3 place V. Hugo, 13331 Marseille Cedex 3, FRANCE. Research partialy supported by DRET under Contract 901636/A000.

Introduction.

A dynamical system is said to be coalescent if its endomorphisms are always automorphisms. The question if there exists a coalescent ergodic dynamical system with positive entropy has not been solved so far and seems to be difficult. The analogical problem in topological dynamics was solved by Walters ([Wal]). His example was not minimal. In [Bu - Kw - 2], a class of strictly ergodic topological Toeplitz flows with positive entropy and trivial topological centralizers is presented.

Of course, they are topologically coalescent. However, the flows of this class are given in a non completely constructive way. Moreover, topological entropy is only estimated from below. In this paper, we give an effective construction of an uncountable set $\mathcal{R}$ of pairwise non isomorphic strictly ergodic Toeplitz flows, with the same given positive topological entropy h, and with trivial centralizers. Furthermore, the elements of $\mathcal{R}$ have the same given maximal equicontinuous factor.

This construction allows to produce a countable family $\mathcal{D}$ of strictly ergodic Toeplitz flows with the same positive entropy h and any two of which are topologically disjoint.

In some sens, the class $\mathcal{D}$ is maximal. Namely, any Toeplitz flow is a proximal extension of it's maximal equicontinuous factor. Then disjointness of Toeplitz flows is equivalent to disjointness of the corresponding maximal equicontinuous factors ([Aus], Cor.13, Chap.11). The maximal equicontinuous factor of every Toeplitz flow is some (ℓ_t)-adic adding machine. It follows from [Aus], p. 161, Cor. 22 and [He-Ro], toma 1, (25-28), that it is not possible to obtain more than countably many pairwise topologically disjoint such machines.

Our construction is a non trivial modification of Grillenberger's one ([Gri]). The main problem we meet in the work is to distinguish between two Toeplitz flows of $\mathcal{R}$. It is solved with the use of an isomorphism theorem (theorem 2.1), which can be applied to a large class of Toeplitz flows.

In [Ch - Ka - MeFr - Ra], the authors proposed to examine special properties of so-called generalized Morse sequences. Metric and spectral properties of dynamical systems associated to these were investigated in [Lem]. These sequences can be generated by finite automata.

To each of these sequences, we associate a symbolic topological flow which is a Z_2-extension over a Toeplitz flow. Using an isomorphism theorem again (theorem 2.2), which is a modification of theorem 2.1, we give an invariant for topological conjugacy of such flows. We are grateful to Professor P. Liardet for several helpful conversations and valuable remarks.

I–Preliminaries.

We shall use $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ to denote the set of integers, the set of positive integers respectively. By a flow, we mean a pair (X,T), where X is a compact metric space and T is a homeomorphism of X. Recall that a flow (X,T) is said to be minimal provided X has no proper T-invariant closed subset. It is said to be uniquely ergodic if and only if there exists a unique T-invariant Borel probability measure on X. It is said to be strictly ergodic if and only if it is both minimal and uniquely ergodic.

Let (X,T) be a flow, and let ρ be a metric in X. For any $x,y \in X$, we say x and y are proximal if and only if $\inf_{i\in\mathbb{Z}} \rho(T^i x, T^i y) = 0$; denote it by xPy. The relation P is symetric and reflexive, but not necessarely transitive nor closed. It is called the proximal relation, and it is T-invariant.

Let (Y,S) be another flow and let $\Pi : X \to Y$ be an onto continuous application such that $\Pi \circ T = S \circ \Pi$. To abbrevate, we write only $\Pi : (X,T) \to (Y,S)$. Then we say that (Y,S) is a factor of (X,T), that $\Pi : (X,T) \to (Y,S)$ is a homomorphism of the flow (X,T) to the flow (Y,S). We also say that the flow (X,T) is an extension of the flow (Y,S). Flows (X,T) and (Y,S) are said to be isomorphic if and only if there exists a homomorphism $\Pi : (X,T) \to (Y,S)$ such that Π is bijective.

The topological centralizer of a flow (X,T), denoted by $C_{top}(X,T)$, is the set of homomorphisms $\Pi : (X,T) \to (X,T)$. A flow (X,T) is said to be topologically coalescent if and only if $C_{top}(X,T)$ is a set of homeomorphisms of X. We say that $C_{top}(X,T)$ is trivial if and only if $C_{top}(X,T) = \{T^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Let $\Pi : (X,T) \to (Y,S)$ be a homomorphism. Then we shall say that (X,T) is a proximal extension of (Y,S), or that Π is proximal, provided that for any $x,y \in X, \Pi(x) = \Pi(y) \Rightarrow xPy$.

Every minimal flow (X,T) has a maximal equicontinuous factor (G,t_e), where G is a compact monothetic group and t_e denotes the rotation on G through some generator e. Let $\Pi : (X,T) \to (G,t_e)$ be the homomorphism associated to this factor. Then if $\Pi' : (X,T) \to (G',t_{e'})$ is another such homomorphism, there exists a homomorphism $\phi : (G,t_e) \to (G',t_{e'})$ such that $\phi \circ \Pi = \Pi'$.

Given a finit set K, let $\Sigma = K^{\mathbb{Z}}$ be the set of all two-sided sequences over K, endowed with the product topology, K being compact and metrizable. Let $\omega, \omega' \in \Sigma$, and define ;

$$\rho(\omega, \omega') = (1 + \min\{n \geq 0, \omega(n) \neq \omega'(n) \text{ or } \omega(-n) \neq \omega'(-n)\})^{-1},$$

where $\omega(p)$ denotes the value of ω at $p, p \in \mathbb{Z}$. Then ρ is a distance on Σ and defines the compact metric product topology of Σ.

Let $0(\omega) = \{S^p\omega, p \in \mathbb{Z}\}$ where S denotes the left shift on Σ. A finite sequence $B = B(0)\dots B(n-1), B(i) \in K, n \geq 1$, is called a block. The number n, denoted by $|B|$, is the length of the block B. If $\omega \in \Sigma$, and B is a block, then $\omega < i, k >, B < i, k >$ $(0 \leq i \leq k < |B|$ for $B)$ shall denote the blocks $\omega(i)\dots\omega(k), B(i)\dots B(k)$ respectively. For $n \geq 1$, K^n denotes the set of blocks of length n over K.

Let $C = C(0)\dots C(m-1)$ be another block over K ; we say that B appears in C at the ith-place if and only if $C < i, i + |B| - 1 >= B$.

If K is an abelian group with an additive law "+" and $|C| = |B|$, then the sum of the blocks B and C is a block defined by

$$B + C = (B(0) + C(0))\dots(B(n-1) + C(n-1)).$$

Likewise, we define a sequence $\omega + \omega', \omega, \omega' \in \Sigma$.

The concatenation of any two blocks B and C over K is a block

$$B.C = B(0)\dots B(n-1)C(0)\dots C(m-1).$$

This operation is extended in a natural way to more than two blocks.

By $fr(B, C)$, with $|B| < |C|$, we denote the ratio ;

$$fr(B, C) = \frac{1}{|C| - |B|}\text{card}\{0 \leq i < |C| - |B|,\ C\!< i, i + |B| - 1 >= B\}.$$

Now, we are in position to define a Toeplitz sequence over K. Let $\Lambda \notin K$, called a hole. Let $(\ell_t)_{t\geq 0}$ be a sequence of positive integers satisfying the following condition :

(1) $$\forall t \geq 0, \ell_t \text{ divides } \ell_{t+1}, \ell_{t+1}/\ell_t \geq 2, \ell_0 \geq 2,$$

and let $(A_t)_{t\geq 0}$ be a sequence of blocks over $K \cup \{\Lambda\}$, satisfying the three following conditions :

$$\begin{cases} (\mathbf{A}) & \forall t \geq 0,\ |A_t| = \ell_t \ ; \\ \\ (\mathbf{B}) & \forall t \geq 0, \forall 0 \leq u < \ell_{t+1}/\ell_t, \forall 0 \leq i < \ell_t, \\ & A_t(i) \neq \Lambda \Rightarrow A_{t+1}(u.\ell_t + i) = A_t(i) \ ; \\ \\ (\mathbf{C}) & \forall t \geq 0, \exists 0 \leq j < \ell_t, A_t(j) = \Lambda \text{ and } \forall i \in I\!N, \\ & \exists t \geq 0, A_t(i) \neq \Lambda \text{ and } A_t(\ell_t - i - 1) \neq \Lambda. \end{cases}$$

For all $t \geq 0$, let ω_t be a sequence in $(K \cup \{\Lambda\})^{\mathbb{Z}}$ such that ;

$$(2) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \omega_t < k.\ell_t, (k+1).\ell_t - 1 >= A_t.$$

In the sequel, for all $t \geq 0$, we assume that ℓ_t is the smallest period of ω_t. Then, because of conditions (B) and (C), the limit $\omega = \lim_t \omega_t$ exists in Σ. We say that ω is a Toeplitz sequence over K, with period structure $(\ell_t)_{t\geq 0}$ and defining sequence of blocks $(A_t)_{t\geq 0}$. Note that ω is not periodic.

Let $\rho(t) = \text{card}\{0 \leq i < \ell_t, A_t(i) \neq \Lambda\}$; then it is easy to see that $d_1 = \lim_t \rho(t)/\ell_t$ exists and belongs to [0,1]. Following [Ja - Ke], we shall say ω is regular if and only if $d_1 = 1$.

Let $r_{t,1} < r_{t,2} < \ldots < r_{t,a_t}$ be the increasing enumeration of all the $0 \leq i < \ell_t$ such that $A_t(i) = \Lambda$. Where the letter "Λ" appears, the coresponding places are called unfilled ones. We will say that a place i is filled if $A_t(i) \in K$. The sequence of sets $(\{r_{t,1}, \ldots, r_{t,a_t}\})_{t\geq 0}$ is the system of holes of ω. Define ;

$$(3) \qquad \forall t \geq 0, b_t = \min\left(\{r_{t,j+1} - r_{t,j}, 1 \leq j < a_t\} \cup \{\ell_t - r_{t,a_t} + r_{t,1}\}\right).$$

We shall say that ω satisfies *condition* (Sh)*-separated holes* - if and only if $\lim_t b_t = +\infty$.

A Toeplitz sequence ω shall be called a $(*)$-Toeplitz sequence provided it satisfies the following condition ;

$$(*) \qquad \begin{cases} \forall t \geq 0, \lambda_t = \ell_{t+1}/\ell_t \geq 3 \ ; \\ \\ A_{t+1} < 0, \ell_t - 1 > \in K^{\ell_t} \text{ and } A_{t+1} < (\lambda_t - 1).\ell_t, \ell_{t+1} - 1 > \in K^{\ell_t} \ ; \\ \\ \forall 0 < u < \lambda_t - 1, \begin{cases} \text{either } A_{t+1} < u.\ell_t, (u+1).\ell_t - 1 >= A_t \ , \\ \\ \text{either } A_{t+1} < u.\ell_t, (u+1).\ell_t - 1 > \in K^{\ell_t}. \end{cases} \end{cases}$$

Note that $(*) \Rightarrow (C)$.

To each Toeplitz sequence ω is associated its sets of t-symbols, denoted by $W_t(\omega), t \geq 0$, where ;

$$W_t(\omega) = \{\omega < k.\ell_t, (k+1).\ell_t - 1 >, k \in \mathbb{Z}\}. \tag{4}$$

Of course, $W_t(\omega)$ is finite. Any $(t+1)$-symbol is a concatenation of t-symbols.

A Toeplitz flow is a pair $(\theta(\omega), S)$, where $\theta(\omega)$ is the closure of $0(\omega)$ in Σ and ω is a Toeplitz sequence. It is known that $(\theta(\omega), S)$ is minimal ([Ja - Ke]). The maximal equicontinuous factor (G, t_e) of $(\theta(\omega), S)$ has been constructed in [Wil] and we recall some parts of this construction that we shall need latter.

Let G be the group of (ℓ_t)-adic integers. Any element $h \in G$ may be represented as a series ;

$$h = \sum_{t=0}^{\infty} q_t.\ell_{t-1}, \;\; 0 \leq q_t < \lambda_{t-1}, \;\; \ell_{-1} = 1, \tag{5}$$

or as a class of sequences $(u_t)_{t \geq 0}, u_t \in \mathbb{N}, u_{t+1} \equiv u_t (mod\ \ell_t), u_t \equiv h_t (mod\ \ell_t)$, where ;

$$h_t = \sum_{i=0}^{t} q_i \ell_{i-1}. \tag{6}$$

Let $e = (1, \ldots, 1, 1, \ldots)$ be the unit element of G, τ_e the associated rotation $(\tau_e(h) = h + e, h \in G)$. Then (G, τ_e) is called the (ℓ_t)-adic adding machine. Let, for any $t \geq 0$, for any $0 \leq n < \ell_t$;

$$\theta_n^t = \{y \in \theta(\omega) \,; \forall k \in \mathbb{Z}, y < -n + k.\ell_t, -n + (k+1).\ell_t - 1 > \in W_t(\omega)\}. \tag{7}$$

Then $n \neq m \Rightarrow \theta_n^t \cap \theta_m^t = \phi, \theta(\omega) = \bigcup_{n=0}^{\ell_t - 1} \theta_n^t$, each θ_n^t is non-empty, open and closed, and ;

$$\theta_0^t \xrightarrow{S} \theta_1^t \xrightarrow{S} \ldots \xrightarrow{S} \theta_{\ell_t - 1}^t \xrightarrow{S} \theta_0^t. \tag{8}$$

Moreover, (7) implies ;

$$\begin{cases} \theta_m^{t+1} \subset \theta_n^t \Leftrightarrow m \equiv n \;\; (mod\ \ell_t), \\ \\ \theta_m^{t+1} \cap \theta_n^t = \phi \;\; \text{otherwise}. \end{cases} \tag{9}$$

Let $h \in G$, given by (5) or (6). Then (8) and (9) imply :

$$\theta_h = \bigcap_{t=0}^{\infty} \theta_{h_t}^t \;\text{ is non-empty and closed.} \tag{10}$$

Note that $\theta_0 = \{\omega\}$; furthermore, we have ;

$$(11) \qquad \begin{cases} \theta_h \cap \theta_{h'} = \phi \text{ if and only if } h \neq h' \ , \\ \theta(\omega) = \bigcup_{h \in G} \theta_h \ , \\ S(\theta_h) = \theta_{h+e}. \end{cases}$$

(11) allows us to define a map $\Pi \ : (\theta(\omega), S) \to (G, t_e),$ by $\Pi(y) = h$ if $y \in \theta_h, y \in \theta(\omega)$; this is the maximal equicontinuous factor of $(\theta(\omega), S)$.

II–Isomorphism theorems.

Let ω and η be two Toeplitz sequences defined by sequences of blocks $(A_t)_{t \geq 0}$ and $(B_t)_{t \geq 0}$ respectively, and having the same period structure $(\ell_t)_{t \geq 0}$. The Toeplitz flows $(\theta(\omega), S)$ and $(\theta(\eta), S)$ have the same maximal equicontinuous factor, the (ℓ_t)-adic adding machine (G, t_e). Let $\Pi_1 \ : (\theta(\omega), S) \to (G, \tau_e)$ and $\Pi_2 \ : (\theta(\eta), S) \to (G, \tau_e)$ be the corresponding homomorphisms.

Let $T \ : (\theta(\omega), S) \to (\theta(\eta), S)$ be a homomorphism. Then T preserves the maximal equicontinuous structures of both flows so it induces a homomorphism $T' \ : (G, \tau_e) \to (G, \tau_e)$. But $T' = \tau_{h_0}$ for some $h_0 \in G$. Thus we obtain the following commutative diagram ;

$$(12) \qquad \begin{array}{ccc} \theta(\omega) & \xrightarrow{T} & \theta(\eta) \\ \Pi_1 \Big\downarrow & & \Big\downarrow \Pi_2 \ . \\ G & \xrightarrow{\tau_{h_0}} & G \end{array}$$

Denoting by $\theta_h(1)$ and $\theta_h(2)$ the sets corresponding to (10) for ω and η respectively, (12) means ;

$$(13) \qquad \forall h \in G, T(\theta_h(1)) = \theta_{h+h_0}(2).$$

We say, if (12) is satisfied for some $h_0 \in G$, that h_0 can be lifted, or that T is over h_0. In particular, we can ask on the existence of homomorphisms from $(\theta(\omega), S)$ to $(\theta(\tau), S)$ that are over 0. In this case, condition (13) may be expressed by ;

$$(14) \qquad T(\omega) = \eta, \text{ because } \theta_0(1) = \{\omega\} \text{ and } \theta_0(2) = \{\eta\}.$$

Theorem 2.1. *There exists a homomorphism* $T : (\theta(\omega), S) \to (\theta(\eta), S)$ *satisfying* (14) *if and only if*

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} \exists t_0 \geq 0, \exists f : W_{t_0}(\omega) \to W_{t_0}(\eta) \text{ onto such that } \forall k \in \mathbb{Z}, \\ \eta < k \cdot \ell_{t_0}, (k+1) \cdot \ell_{t_0} - 1 >= f\left(\omega < k \cdot \ell_{t_0}, (k+1) \cdot \ell_{t_0} - 1 >\right). \end{cases}$$

Furthermore, T *is an isomorphism if and only if* (15) *is satisfied for some* t_0 *for which* f *is bijective.*

Proof. Necessity arises from the fact that T is determined by some code of finite length. For $t = 0$, let ;

$$u_t(\omega) = \min(\{0 \leq i < \ell_t \,;\, A_t(i) = \wedge\} \cup \{\ell_t - i - 1 \,;\, 0 \leq i < \ell_t, A_t(i) = \wedge).$$

Because ω is Toeplitz, there exists $t_0 \geq 0, t \geq t_0 \Rightarrow u_t(\omega) > x$, where x is the length of some code defining T. Then coding a t-symbol of ω does not depend on the neighbouring ones ; this leads to (15).

Sufficiency shall be shown using the theorem of extension by continuity of some uniformly continuous application defined on a dense subset. (15) enables us to define a map $T : 0(\omega) \to 0(\eta)$ such that $T(S^k\omega) = S^k\eta, k \in \mathbb{Z}$.

The function f of (15) determines, for any $t \geq t_0$, a function $f_t : W_t(\omega) \to W_t(\eta), f_{t_0} = f$, such that (15) is satisfied with t and f_t. Precisely, for any $B \in W_t(\omega)$, there exists $W_0, \ldots, W_{\ell_t/\ell_{t_0}-1} \in W_{t_0}(\omega)$ (see (4)), such that we can write a concatenation $B = W_0 \cdot W_1 \ldots W_{\ell_t/\ell_t-1}$. Then put $f_t(B) = f(W_0) \cdot f(W_1) \ldots f(W_{\ell_t/\ell_{t_0}-1})$.

Let $\varepsilon > 0$ be given. Choose $t_1 \geq t_0$ such that $1/\ell_{t_1} < \varepsilon$. Put $t = t_1$. Define

$$\text{(16)} \qquad \delta_1 = \min_{n \neq m} \rho(\theta^t_n, \theta^t_m),$$

where $\theta^t_n, 0 \leq n < \ell_t,$ are the sets associated to ω defined in (7). Define

$$\text{(17)} \qquad \delta = \min(1/2\ell_t, \delta_1) \,;$$

then $\delta > 0$. Let $j, k \in \mathbb{Z}$ be such that $\rho(S^k\omega, S^j\omega) < \delta$. Then (16) and (17) mean that ;

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} \exists 0 \leq n < \ell_t, S^k\omega \text{ and } S^j\omega \in \theta^t_n(1), \text{ such that ;} \\ S^k\omega < -n - \ell_t, -n + 2 \cdot \ell_t - 1 >= S^j\omega < -n - \ell_t, -n + 2 \cdot \ell_t - 1 > . \end{cases}$$

Notice, that $S^k\omega < -n-\ell_t, -n+2.\ell_t-1 >$ and $S^j\omega < -n-\ell_t, -n+2.\ell_t-1 >$ are concatenations of 3 t-symbols W_0, W_1, W_2.

Then using (18), (15) and (7) again, we obtain ;

$$\begin{cases} T(S^k\omega) < -n-\ell_t\ ; -n+2\cdot\ell_t-1 >= f_t(W_0).f_t(W_1).f_t(W_2), \\ \text{ and} \\ T(S^j\omega) < -n-\ell_t\ ; -n+2\cdot\ell_t-1 >= f_t(W_0).f_t(W_1).f_t(W_2). \end{cases}$$

Thus, we have ;

$$T(S^k\omega) < -n-\ell_t\ ; -n+2\cdot\ell_t-1 >= T(S^j\omega) < -n-\ell_t\ ; -n+2\cdot\ell_t-1 > .$$

This means, because $0 \le n < \ell_t$, that $\rho\big(T(S^k\omega), T(S^j\omega)\big) < 1/\ell_{t_1} < \varepsilon$, which in turn proves the uniform continuity of T. The isomorphism case is immediate. This ends the proof.

Remark 2.1. *.The preceeding proof shows that if (14) is satisfied for some t_0, then it is for any $t \ge t_0$ with f_t instead of f.*

In the case of ω and τ satisfying (Sh) condition, Theorem 2.1 takes the following special form.

Theorem 2.2. *Let ω, η be two Toeplitz flows satisfying condition (Sh), having the same period structure $(\ell_t)_{t\ge0}$ and the same systems of holes $(\{r_{t,1},\ldots,r_{t,a_t}\})_{t\ge0}$. Then there exists an isomorphism $T\ : (\theta(\omega), S) \to (\theta(\tau), S)$ over 0 if and only if*

$$\text{(19)}\qquad \begin{cases} \exists t_0 \ge 0, \exists \sigma_1,\ldots,\sigma_{a_{t_0}}, a_{t_0} \text{ permutations of } K \text{ such that} \\ \\ \forall 1 \le j \le a_{t_0}, \forall k \in \mathbb{Z}, \omega(k\cdot\ell_{t_0}+r_{t,j}) = c \Rightarrow \eta(k\cdot\ell_{t_0}+r_{t,j}) = \sigma_j(c). \end{cases}$$

Proof. Necessity comes from a coding argument again. Let x be some integer such that both T and T^{-1} are defined by codes of lengths less than x. Take $t_0 \ge 0$ such that $t \ge t_0 \Rightarrow b_t > x$ where $(b_t)_{t\ge0}$ is defined as in (3). Then coding according to T or T^{-1} a hole of ω or τ does not depend on it's neighbouring ones. This leads to the a_{t_0} permutations of (19).

Sufficiency is a consequence of the fact that any t_0-symbol is completely determined by the way it's holes are filled in. Thus (19) leads to (15) of Theorem 2.1 with f bijective.

Notice that here again, if (19) holds for some t_0, it does for any $t \ge t_0$ and corresponding a_t permutations.

III–An uncountable family $\mathcal{F}$.

We shall construct an uncountable family $\mathcal{F}$ of strictly ergodic Toeplitz sequences having the same given topological entropy h and maximal equicontinuous factor, any two distinct elements of which are not topologically isomorphic.

Let $0 < h < +\infty$ and $(p_t)_{t\geq 0}$ be given such that $(p_t)_{t\geq 0}$ satisfies condition (1). Put $p_{-1} = 1, \lambda_t = p_t/p_{t-1},$ for $t \geq 0$.

Let (G, τ_e) be the (p_t)-adic adding machine. We shall first construct an uncountable family of strictly ergodic Toeplitz flows with the entropy h and the maximal equicontinuous factor (G, τ_e).

III.1.–Preliminary constructions.

We start with the construction of four sequences $(n_j)_{j\geq 0}, (m_j)_{j\geq 0}, (s_j)_{j\geq 0}, (k_j)_{j\geq 0}$ of positive integers and a subsequence $t_0 = -1 < t_1 < t_2 < \ldots$ such that ;

$$\begin{cases} (\mathbf{C1}) & n_j = p_{t_j} \ , \\ (\mathbf{C2}) & n_j \cdot h + 1 \leq \log m_j \leq n_j \cdot h + 2, m_j \geq 3 \ ; \\ (\mathbf{C3}) & p_{t_{j+1}}/p_{t_j} = \lambda_{t_{j+1}} \ldots \lambda_{t_j+1} = \mu_{j+1} = s_j \cdot m_j + k_j \ ; \\ (\mathbf{C4}) & m_j \leq k_j < 2 \cdot m_j \ ; \\ (\mathbf{C5}) & s_j \geq 2^j + 1 \ ; \\ (\mathbf{C6}) & \mu_{j+1} > \dfrac{\log(j+2) - 1}{\log(j+1) - 1}, \ j = 0, 1, \ldots . \end{cases}$$

Step 1. Choose $k \geq 3$ such that $h + 1 \leq \log k \leq h + 2$, set $n_0 = 1, t_0 = -1,$ and $m_0 = k$.

Step 2, induction. Assume that the numbers $n_0, \ldots, n_d$; $m_0, \ldots, m_d$; $s_0, \ldots, s_{d-1}$; $k_0, \ldots, k_{d-1}$ and $t_0 < t_1 < \ldots < t_d$ are defined satisfying the conditions **(C1) - (C6)**, for some $d \geq 0$. For $d = 0, s_{-1}$ and k_{-1} are not defined. For $t > t_d$, we have ;

$$\lambda_t \ldots \lambda_{t_d+1} = \bar{s}_t \cdot m_d + \bar{k}_t, 0 \leq \bar{k}_t < m_d, \bar{s}_t \geq 0. \tag{20}$$

Now choose $t_{d+1} > t_d$ in such a way that $\sigma_d := \bar{s}_{t_{d+1}}$ satisfies ;

$$(21) \qquad \begin{cases} \sigma_d > 4 \cdot \log m_d + 2/m_d + 1/6 \ ; \\ \sigma_d \geq 2^d + 2 \ ; \\ \mu_{d+1} = \lambda_{t_{d+1}} \dots \lambda_{t_d+1} > \dfrac{\log(d+2)-1}{\log(d+1)-1} \ ; \\ \mu_{d+1} \geq \dfrac{\log 3 - 1}{h} \ ; \\ \log(2\pi\sigma_d) < \sigma_d. \end{cases}$$

Define ;

$$(22) \qquad n_{d+1} = n_d \cdot \mu_{d+1}.$$

Then we have ;

$$(23) \qquad \mu_{d+1} = \sigma_d \cdot m_d + \bar{k}_d, \bar{k}_d := \bar{k}_{t_{d+1}}.$$

According to (20), (21), (22) and (23), we have ;

$$(24) \qquad \begin{cases} \mu_{d+1} = s_d \cdot m_d + k_d, \\ m_d \leq k_d < 2 \cdot m_d, \\ s_d = \sigma_d - 1 \geq 2^d + 1. \end{cases}$$

Further, we have ;

$$(25) \qquad n_{d+1} = n_d \cdot \mu_{d+1} = n_d \cdot (s_d \cdot m_d + k_d).$$

To define m_{d+1} put

$$(26) \qquad \tilde{m}_{d+1} = (m_d \cdot s_d)!/(s_d!)^{m_d} \ .$$

Below, in Lemma 3.1, we prove the inequality ;

$$(27) \qquad \log \tilde{m}_{d+1} \geq n_{d+1} \cdot h + 1.$$

Assuming (27) holds, we can choose $m_{d+1} \leq \tilde{m}_{d+1}$ such that ;

$$(28) \qquad n_{d+1} \cdot h + 1 \leq \log m_{d+1} \leq n_{d+1} \cdot h + 2.$$

The inequality $n_{d+1} \geq \mu_{d+1} \geq \frac{\log 3 - 1}{h}$ holds and (28) gives $\log m_{d+1} \geq n_{d+1} \cdot h + 1 \geq \log 3$ thus $m_{d+1} \geq 3$. This gives the construction of induction step provided we prove the following :

Lemma 3.1. $\log \tilde{m}_{d+1} \geq n_{d+1} \cdot h + 1$.

Proof. Recall the Stirling's formula ;

$$\frac{n^n \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n}}{e^n} \leq n! \leq \frac{n^n \cdot \sqrt{2 \cdot \pi . n}}{e^n} \cdot e^{1/12.n}, \text{ which with (26) gives;}$$

$$\begin{aligned}
\log \widetilde{m}_{d+1} \quad & \geq m_d s_d \log m_d + \tfrac{1}{2}\log(2\pi m_d s_d) - \tfrac{m_d}{2}\log(2\pi s_d) - \tfrac{m_d}{12 s_d} \\
& \geq m_d s_d \log m_d - \tfrac{m_d}{2}\log(2\pi s_d) - \tfrac{m_d}{12} \\
\text{use (23) :} \quad & \geq (\mu_{d+1} - k_d)\log m_d - \tfrac{m_d}{2}\log(2\pi s_d) - \tfrac{m_d}{12} \\
\text{(24) :} \quad & \geq \mu_{d+1}\log m_d - 2m_d \log m_d - \tfrac{m_d}{2}\log(2\pi s_d) - \tfrac{m_d}{12} \\
\text{(C2) :} \quad & \geq \mu_{d+1}(n_d h + 1) - 2m_d \log m_d - \tfrac{m_d}{2}.\log(2\pi s_d) - \tfrac{m_d}{12} \\
\text{use (23) :} \quad & \geq n_{d+1}h + \bar{s}_d.m_d - \tfrac{1}{2}.m_d\bar{s}_d - 2m_d\log m_d - \tfrac{m_d}{12} \\
& = n_{d+1}h + \tfrac{1}{2}m_d\bar{s}_d - 2.m_d\log m_d - \tfrac{m_d}{12} \\
\text{use (21) :} \quad & \geq n_{d+1}h + \tfrac{1}{2}m_d(4\log m_d + \tfrac{2}{m_d} + \tfrac{1}{6}) - 2m_d\log m_d - \tfrac{m_d}{12} \\
& = n_{d+1}h + 1
\end{aligned}$$

In the sequel, we shall need the following ;

Lemma 3.2. $m_d^{k_d - 1} > 2^d, \;\; d = 0, 1, \ldots.$

Proof. Let us first show that

$$n_d > \frac{\log(d+1) - 1}{h}. \tag{29}$$

The inequality (29) is true for $d = 0$. If it holds for $d \geq 0$, then $n_{d+1} = n_d.\mu_{d+1} > \frac{\log(d+2)-1}{h}$ (use (21)). This proves (29). Then (29) and (C2) imply ;

$$\log m_d \geq n_d.h + 1 > \log(d+1).$$

Thus ;

$$m_d > d + 1. \tag{30}$$

Now, using (24), (30) and $m_d \geq 3$, we obtain $m_d^{k_d-1} \geq 3^{m_d - 1} > 3^d \geq 2^d, \;\; d = 0, 1, \ldots$.

III.2.–Construction of Toeplitz sequences.

Let $K = \{0,1,\dots,k-1\}$. We are going to construct sequences of j-symbols $A_j[0],\dots,A_j[m_j-1]$ over K and sequences of blocks $(A_j)_{j\geq 0}$ over $K\cup\{\bigwedge\}$ such that ;

$$|A_j[i]| = |A_j| = n_j, j\geq 0, 0\leq i< m_j,$$

and each $A_j[i]$ coincides with A_j at the filled places of A_j.

Step 1. $j=0$; put $A_0=\bigwedge, A_0[i]=i, 0\leq i<k$. We have $|A_0[i]|=|A_0|=1=n_0$, and $m_0=k$.

Step 2. Assume that $A_0,\dots,A_j$ are defined and $A_j[0],\dots,A_j[m_j-1]$ are blocks such that each of $A_j[i]$ coincides with A_j at the filled places of $A_j, i=0,\dots,m_j-1$.

We have $n_{j+1}=n_j.(s_j.m_j+k_j)$ (see(25)). Let us distinguish k_j blocks $F_0^{(j)},\dots,F_{k_j-1}^{(j)}$ from among j-symbols $A_j[0],\dots,A_j[m_j-1]$, with or without repetitions.

Denote $Z_{j+1}=\{0,1,\dots,\mu-1\}, \mu=\mu_{j+1}$. Let X_{j+1} be the subset of Z_{j+1} defined as follows ;

$$X_{j+1}=\{0,\mu-k_j+1,\dots,\mu-1\},\ \mathrm{card}\,(X_{j+1})=k_j.$$

Let ;

$$(31)\qquad \begin{cases} \sigma=\{Z_0^{(j+1)},\dots,Z_{m_j-1}^{(j+1)}\} \text{ be a partition of the set} \\ Z_{j+1}\backslash X_{j+1} \text{ into } m_j \text{ disjoint subsets of equal cardinality } s_j. \end{cases}$$

Define a block $C_\sigma^{(j+1)}=\widetilde{C}_0\dots\widetilde{C}_{\mu-1}, \mu=\mu_{j+1}$, where ;

$$\tilde{C}_u=\begin{cases} A_j[r] \text{ if } u\in Z_r^{(j+1)} \\ F_0^{(j)} \text{ if } u=0, \quad F_{u-\mu+k_j}^{(j)} \text{ if } u\in X_{j+1} \text{ and } u\neq 0. \end{cases}$$

We have $|C_\sigma^{(j+1)}|=n_j(s_jm_j+k_j)=n_{j+1}$. Let $\tilde{\Sigma}$ be the set of all partitions σ satisfying (31). It is easy to check that card $\widetilde{\Sigma}=\widetilde{m}_{j+1}$ (see (26)).

Now, we select m_{j+1} blocks $A_{j+1}[0],\dots,A_{j+1}[m_{j+1}-1]$ from among the blocks $C_\sigma^{(j+1)}, \sigma\in\widetilde{\Sigma}$ (recall $m_{j+1}\leq\widetilde{m}_{j+1}$). We define $A_{j+1}=B_0\dots B_{\mu-1}$ where ;

$$B_u=\begin{cases} A_j \text{ if } u\in Z_{j+1}\backslash X_{j+1}, \\ F_0^{(j)} \text{ if } u=0, \\ F_{u-\mu+k_j}^{(j)} \text{ if } u\in X_{j+1}\backslash\{0\}, \mu=\mu_{j+1}. \end{cases}$$

A_{j+1} is partially filled and $|A_{j+1}| = |A_{j+1}[i]| = n_{j+1}, 0 \leq i < m_{j+1}$. Each block $A_{j+1}[i]$ coincides with A_{j+1} at the filled places of A_{j+1}. Thus we have constructed, associated to each sequence of choices $(\{F_0^{(j)}, \ldots, F_{k_j-1}^{(j)}\})_{j\geq 0}$, a sequence of blocks over $K \cup \{\bigwedge\}, (A_j)_{j\geq 0}$, defining a Toeplitz sequence ω satisfying $(*)$ condition. Any two distinct elements of this class, denoted by $\mathcal{R}$, are constructed using the same sequences $(n_j)_{j\geq 0}, (m_j)_{j\geq 0}, (s_j)_{j\geq 0}, (k_j)_{j\geq 0}$ and subsequence $t_0 = -1 < t_1 < t_2 < \ldots$. The sets X_{j+1}, Z_{j+1} are the same too.

III.3.–Properties of the class $\mathcal{R}$.

Proposition 3.1. *For any $\omega \in \mathcal{R}, (\theta(\omega), S)$ has the following properties ;*

$$\begin{cases} (i) : & W_j(\omega) = \{A_j(0), \ldots, A_j(m_j - 1)\}. \\ (ii) : & (G, t_e) \text{ is the maximal equicontinuous factor of } (\theta(\omega), S). \\ (iii) : & (\theta(\omega), S) \text{ satisfies } (*) \text{ condition.} \\ (iv) : & \text{for any } \omega' \in \mathcal{R},\ \omega \text{ and } \omega' \text{ have the same systems of holes.} \\ (v) : & \text{the topological entropy of } (\theta(\omega), S) \text{ is } h_{top}(\omega) = h. \\ (vi) & (\theta(\omega), S) \text{ is not regular.} \\ (vii) & (\theta(\omega), S) \text{ is strictly ergodic.} \end{cases}$$

Proof. The period structure of ω is $(n_j)_{j\geq 0}$ which gives (ii). The properties (i), (iii), (iv) follow from the construction, (vi) shall follow from (v) using the fact established in [Ja - Ke] that a regular Toeplitz flow is metrically isomorphic to it's maximal equicontinuous factor, provided with Haar measure, which has 0 entropy. This can however be done by some direct computation.

(v) ; (C2) gives $h + 1/n_j \leq 1/n_j \log m_j \leq h + 2/n_j$. Thus $\lim_j 1/n_j \log m_j = h$. If $\theta(j+1)$ denotes the cardinality of the set of blocks of length n_{j+1} appearing in ω, using same arguments as in [Gri], it follows ; $\theta(j+1) \leq m_j^{(\mu+1)} \cdot n_j, \mu = \mu_{j+1}$. Hence $1/n_{j+1} \log \theta(j+1) \leq \frac{\mu_{j+1}}{n_{j+1}} \log m_j + 1/n_{j+1} \log m_j + 1/n_{j+1} \log n_j$, what implies $h_{top}(\omega) \leq \lim_j 1/n_j \log m_j = h$. The converse inequality is evident.

Let us prove (vii). Take a block C over K. Then every $A_{j+1}[i], i = 0, \ldots, m_{j+1} - 1$ is a concatenation of the blocks $A_j[0], \ldots, A_j[m_j - 1]$ and $F_0^{(j)}, \ldots, F_{k_j-1}^{(j)}$. Moreover, each block $A_j[i]$ appears s_j-times. Thus we have the formula ;

$$fr(C, A_{j+1}[i]) = \underbrace{\frac{s_j}{s_j.m_j + k_j} \sum_{t=0}^{m_j-1} fr(C, A_j[t])}_{I_0} + \underbrace{\frac{1}{s_j.m_j + k_j} \sum_{u=0}^{k_j-1} fr(C, F_u^{(j)})}_{I_1} + I_2$$

where $I_2 \leq \frac{2.|C|.\mu_{j+1}}{n_{j+1}} = \frac{2.|C|}{n_j}$.

Then for any $\varepsilon > 0,$ there exists $j_1 > 0, j \geq j_1 \Rightarrow I_1 + I_2 < \varepsilon/2$. At the same time, $I_0 = 1/m_j \sum_{t=0}^{m_j-1} fr(C, A_j[t]) - k_j/s_j.m_j + k_j$. Using (C4), for $j \geq j_2$, we obtain ;

$$|fr(C, A_{j+1}[i]) - fr(C, A_{j+1}[i'])| < \varepsilon, 0 \leq i, i' < m_{j+1} - 1.$$

Now, it is a standard argument that this last inequality implies unique ergodicity of $(\theta(\omega), S)$. This ends the proof.

Remark 2. *The construction of 3.2 allows to produce a countable family $\mathcal{D}$ of pairwise topologically disjoint Toeplitz flows. Let $\mathcal{P} = \{q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots\}$ be the set of all prime numbers. Let (G_i, t_{e_i}) be the $(q_t^{(i)})$-adic adding machine, where for any $t \geq 0, q_t^{(i)} := (q^{(i)})^{t+1}, \quad i \geq 1$. Given $h > 0$, using 3.2, we construct a Toeplitz flow $(\theta(\omega_i), S)$ having h as topological entropy and (G_i, t_{e_i}) as maximal equicontinuous factor.*

It follows from [Pau] and [Wil] that any Toeplitz flow is a proximal extension of it's maximal equicontinuous factor. It follows then from [Aus], p. 155, Cor. 13 that two Toeplitz flows are topologically disjoint if and only if the corresponding maximal equicontinuous factors are. Next, [Aus], p. 161, Cor. 22, says that two adding machines (G_i, t_{e_i}) and (G_j, t_{e_j}) are topologically disjoint if and only if $i \neq j$. Let $\mathcal{D} = \{(\theta(\omega_i), S), \quad i \geq 1\}$, then $\mathcal{D}$ has the required properties.

In [B - K - 2] is proved that if ω is a $(*)$-Toeplitz sequence, it has a trivial topological centralizer. Repeating the same arguments, we obtain ;

Proposition 3.2. *If $\omega, \eta \in \mathcal{R}$, and $T : (\theta(\omega), S) \to (\theta(\eta), S)$ is a homomorphism, then T is over some rationnal (p_t)-adic integer.*

Remark 3.1. *Proposition 3.2 means that if $\omega, \eta \in \mathcal{R}$ and there exists a homomorphism $T : (\theta(\omega), S) \to (\theta(\eta), S)$, then there exists a homomorphism over 0.*

Now since for any $j \geq 0$, card $W_j(\omega) =$ card $W_j(\eta) = m_j$, we have, applying Theorem 2.1, Proposition 3.2 and Remark 3.1 ;

Theorem 3.1. *Let $\omega, \eta \in \mathcal{R}$. Then there exists a homomorphism*

$$T \ : (\theta(\omega), S) \to (\theta(\eta), S)$$

if and only if

$$\begin{cases} \exists j_0 \geq 0, \exists f \ : W_{j_0}(\omega) \to W_{j_0}(\eta) \ \text{ bijective such that} \\ \forall k \in \mathbb{Z}, f(\omega< k.n_{j_0}, (k+1).r_{j_0} - 1 >) = \eta< k.n_{j_0}, (k+1).n_{j_0} - 1 > . \end{cases}$$

III.4.–Construction of a family $\mathcal{F}$.

For any $j \geq 0$, let $B \in \{0,1\}^j$ ($\{0,1\}^0 = \{E\}$, where E denotes the empty block). We will construct a family $\{A_{j+1}[B]\}_{j\geq 0}$ of blocks over $K \cup \{\Lambda\}$ and a family of blocks $\{A_{j+1}[i;B]\}_{0\leq i<m_{j+1},\, j\geq 0}$, over K, such that each $A_{j+1}[i;B]$ is a concatenation of blocks $A_j[u;C]$, $0 \leq u < m_j$, and coincides with $A_{j+1}[B]$ at the filled places of $A_{j+1}[B]$, where $B = Cr,\ r \in \{0,1\}$.

Step 1. For $j = 1$, we construct A_0, A_1 and $A_1[0], \ldots, A_1[m_1 - 1]$ as in steps 1 and 2 of part 3.2 ; put $A_1[i\ ;\ E] = A_1[i]$, $\ 0 \leq i < m_1, A_1[E] = A_1$.

Step 2. Assume that $A_j[C], A_j[0\ ;\ C], \ldots, A_j[m_j - 1\ ; C]$ are constructed for arbitrary $C \in \{0,1\}^{j-1}, j \geq 1$. Select blocks $F_0^{(j)}[0^j], \ldots, F_{k_j-1}^{(j)}[0^j]$ from among $A_j[0\ ; 0^{j-1}], \ldots, A_j[m_j - 1\ ; 0^{j-1}]$, where the symbol 0^s means the block $\underbrace{0\ldots0}_{s}$ if $s \geq 1$, and E if $s \leq 0$.

Now, for any $B \in \{0,1\}^j$, select a block $F_0^{(j)}[B]$ from among $A_j[0;C], \ldots, A_j[m_j-1;C]$ where $B = C.r, r \in \{0,1\}$. Observe that $F_0^{(j)}[0^j]$ and $F_0^{(j)}[B]$ are concatenations of $(j-1)$-symbols. Letting $C = D.r_1, r_1 \in \{0,1\}, D \in \{0,1\}^{j-2}$, and $D = E$ if $j = 1$ or 2, we can write ;

$$\begin{cases} F_0^{(j)}[0^j] = A_{j-1}[i_0\ ; 0^{j-2}] \ldots A_{j-1}[i_{\mu-1}\ ; 0^{j-2}], \\ \\ F_0^{(j)}[B] = A_{j-1}[v_0\ ; D] \ldots A_{j-1}[v_{\mu-1}\ ; D], \ \text{where } \mu = \mu_{j-1}. \end{cases}$$

We will say that $F_0^{(j)}[0^j]$ and $F_0^{(j)}[B]$ determine a one to one correspondance between $(j-1)$-symbols if and only if there exists a permutation σ of $\{0, \ldots, m_{j-1} - 1\}$ such that for any $0 \leq u < \mu, v_u = \sigma(i_u)$.

Such a permutation σ determines a one to one mapping

$$\bar{\sigma} \ : \{A_j[0\ ; 0^{j-1}], \ldots, A_j[m_j - 1\ ; 0^{j-1}]\} \longrightarrow \{A_j[0\ ; C], \ldots, A_j[m_j - 1\ ; C]\}$$

defined by, if $A_j[i\,;0^{j-1}] = A_{j-1}[d_0\,;0^{j-2}]\ldots A_{j-1}[d_{\mu-1}\,;0^{j-2}]$,

$$\bar{\sigma}(A_j[i\,;0^{j-1}]) = A_{j-1}[\sigma(d_0); D]\ldots A_{j-1}[\sigma(d_{\mu-1}); D], \mu = \mu_{j-1}.$$

Assume that $F_1^{(j)}[B'],\ldots,F_{k_j-1}^{(j)}[B']$ are defined for any $B' \in \{0,1\}^j$ with $B' < B$ where "$<$ " denotes the lexicographic order.

If $F_0^{(j)}[B]$ does not determine a one to one correspondance with some $F_0^{(j)}[B'], B' < B$, then we select $F_1^{(j)}[B],\ldots,F_{k_j-1}^{(j)}[B]$ in an arbitrary way from among $A_j[0\,;\ C],\ldots,A_j[m_j-1; C]$.

If not, we choose $F_1^{(j)}[B],\ldots,F_{k_j-1}^{(j)}[B]$ such that there exists $1 \leq u < k_j, F_u^{(j)}[B]$ differs from any $\bar{\sigma}(F_u^{(j)}[B'])$, where $B' < B$ and σ is a one to one correspondance that can be determined by $F_u^{(j)}[B]$ and $F_u^{(j)}[B']$. Such a choice is possible because the number of (k_j-1)-tuples of j-symbols to be excluded in the above selections is at most 2^j, and the possible number of such is $m_j^{k_j-1}$ (see Lemma 3.2).

Now the blocks $F_0^{(j)}[B],\ldots,F_{k_j-1}^{(j)}[B]$ are constructed, for every $B \in \{0,1\}^j$, we take them to construct the blocks $A_{j+1}[0\,;B],\ldots,A_{j+1}[m_{j+1}-1\,;B]$ and $A_{j+1}[B]$ as in part.3.2.

The family of blocks we have constructed above has the following property ;

$$\begin{cases} \text{whenever } B \neq B', B, B' \in \{0,1\}^j, \text{ there is no one to one} \\ \text{correspondance } \sigma \text{ between the corresponding } (j-1)\text{-symbols} \\ \text{such that } F_0^{(j)}[B'] = \bar{\sigma}(F_0^{(j)}[B]),\ldots,F_{k_j-1}^{(j)}[B'] = \bar{\sigma}(F_{k_j-1}^{(j)}[B]). \end{cases}$$

Now, let $u = (u_1,\ldots,u_n,\ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Let $\omega = \omega(u)$ be a Toeplitz sequence of $\mathcal{R}$ with defining sequence of blocks $(A_{j+1}[B_j])_{j\geq 0}$ where $B_j = u_1\ldots u_j$, if $j \geq 1$. Using Theorem 3.1 and property (32), we obtain ;

Theorem 3.2. *If $u, u' \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, the Toeplitz flows $(\theta(\omega(u)), S)$ and $(\theta(\omega(u')), S)$ are topologically isomorphic if and only if $u = u'$.*

Define

$$\mathcal{F} = \{\omega(u), u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}.$$

Of course, $\mathcal{F}$ is uncountable.

Corollary 3.1. *For every $\omega, \omega' \in \mathcal{F}$, the associated flows have the same maximal equicontinuous factor (G, τ_e), the same topological entropy h, are strictly ergodic, and are topologically isomorphic if and only if $\omega = \omega'$.*

IV–A topological invariant for generalized Morse sequences.

In this section, we examine topological flows associated to generalized Morse sequences, defined in [Ch - Ka - MeFr - Ra]. These are different from the class of generalized Morse sequences introduced by Keane.

To each of these sequences we associate a topological flow which is a Z_2-extension over a regular Toeplitz sequence. These Toeplitz sequences appear to be of a special type, which we define below.

IV.1.–m–Toeplitz sequences.

Given $m \geq 1$, and $K = Z_2 = \{0, 1\}$, assume $(A_t)_{t \geq 0}$ is a sequence of blocks satisfying (A) and (B) with $|A_t| = m.\ell_t$, and $(\ell_t)_{t \geq 0}$ satisfies (1). Assume additionally that each A_t has precisely m holes at places $\ell_t - 1, \dots, m.\ell_t - 1$. In other words, A_t has the following form ;

$$A_t = A_t[0] \wedge A_t[1] \wedge \dots \wedge A_t[m-1] \wedge,$$

where $A_t[i]$ is a block over Z_2 and $|A_t[i]| = \ell_t - 1, 0 \leq i < m$.

To obtain a block A_{t+1}, we use a block α_{t+1} of the form

$$\alpha_{t+1} = \alpha_0^{(t+1)} \wedge \alpha_1^{(t+1)} \wedge \dots \wedge \alpha_{m-1}^{(t+1)} \wedge, \tag{33}$$

where $\alpha_i^{(t+1)}, 0 \leq i < m$, are blocks over Z_2 and $|\alpha_i^{(t+1)}| = \lambda_{t+1} - 1, \lambda_{t+1} = \ell_{t+1}/\ell_t, t \geq 0$.

The block $\overline{A}_{t+1} = \overbrace{A_t \dots A_t}^{\lambda_{t+1}}$ has $\lambda_{t+1}.m$ holes. Using the successive members of α_{t+1}, we fill $m.(\lambda_{t+1} - 1)$ holes of $\overline{A}_{t+1}$, and obtain a block A_{t+1} having the prescribed form.

We then define ω in $(K \cup \{\wedge\})^{\mathbb{Z}}$ by

$$\omega = \lim_t w_t, \tag{34}$$

as was done for the definition of a Toeplitz sequence in (2). Note that ω has only one hole at place -1.

We shall say ω is a m-Toeplitz sequence if and only if additionally the following condition is fulfilled for any $t \geq 0$;

$$(35) \qquad \operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z}, w(k.m\ell_t - 1) = 0\} = \operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z}, w(k.m\ell_t - 1) = 1\} = +\infty.$$

It is true that ω does not satisfy the condition (C). The sequence ω is a T^0-sequence in the sens of [Bu - Kw - 1]. The class of all T^0-sequences is larger than the one of Toeplitz sequences. However, every T^0-sequence determines a Toeplitz flow. Namely, let us define ;

$$\theta(\omega) = \{y \in \Sigma, \exists (z_t)_{t \geq 1} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, y = \lim_t S^{z_t}\omega\}.$$

It follows from [Bu - Kw - 1] and [Roj] that there exists a Toeplitz sequence $\tilde{\omega} \in \theta(\omega)$, and that $\theta(\tilde{\omega}) = \theta(\omega)$, where $\theta(\tilde{\omega})$ denotes the usual orbit-closure of $\tilde{\omega}$. Then from [Wil] again we obtain that (G, t_e), the $(m.\ell_t)$-adic adding machine, is the maximal equicontinuous factor of $(\theta(\omega), S)$ (the construction is similar to the one presented in part 1).

Assume additionnaly that m divides infinitely many λ_t $'s$; then it is not hard to observe that the following holds ;

$$\begin{cases} \text{card } \theta_h = 2 \text{ if and only if } h \in \tilde{Z}, \\ \text{card } \theta_h = 1 \text{ if and only if } h \notin \tilde{Z}, \\ \text{where } \widetilde{Z} = \{k.e, k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

The flow $(\theta(\omega), S)$ determines a Z_2-extension $(\tilde{\theta}(\omega), S_\varphi)$, where $\tilde{\theta}(\omega) = \theta(\omega) \times Z_2$, $S_\varphi(y,i) = (Sy, i + \varphi(y))$, $i \in Z_2$, $y \in \theta(\omega)$, $\varphi(y) = y(0)$. Since φ is a continuous function, $(\tilde{\theta}(\omega), S_\varphi)$ is a topological flow. It turns out that $(\tilde{\theta}(\omega), S_\varphi)$ can be represented as the S-closure of some two-sided sequence.

Denote by ω^0, ω^1 sequences over Z_2 defined as follows ;

$$(37) \qquad \omega^i(j) = \omega(j-1) \text{ if } j \neq 0, \ \omega^i(0) = i, \ i = 0, 1.$$

Next, to each sequence $v \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} = \Sigma$, we associate two sequences denoted $\check{v}_i, i = 0, 1$, in the following way ;

$$\check{v}_i(j) = \begin{cases} i \text{ if } j = 0 \\ i + v(0) + \ldots + v(j-1) \text{ if } j \geq 1, \\ i + v(-1) + \ldots + v(j) \text{ if } j \leq -1. \end{cases}$$

Proposition 4.1. *The topological flows* $(\theta(\breve{\omega}_0^0), S)$ *and* $(\widetilde{\theta}(\omega), S_\varphi)$ *are minimal and topologically isomorphic. Moreover ;*

$$\theta(\breve{\omega}_0^0) = \theta(\breve{\omega}_0^1). \tag{38}$$

Proof. Minimality of $(\tilde{\theta}(\omega), S_\varphi)$ is proved in [Bu - Kw - 1] using the fact that ω satisfies condition (Sh).

Let $\theta_1 = \{\breve{y}_0,\ \breve{y}_1,\ y \in \theta(\omega)\}$. Define a mapping $\psi\ : \theta(\omega) \times Z_2 \to \theta_1$ by $\psi(y, i) = \breve{y}_i$. Then ψ is one to one and continuous. Moreover,

$$S(\breve{y}_i) = (\breve{Sy})_{i+y(0)}.$$

The above equality means that θ_1 is a closed and S-invariant subset of $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ and that ψ is a topological isomorphism from $(\theta(\omega) \times Z_2, S_\varphi)$ to (θ_1, S). Further, it is not hard to observe that (35) implies $\omega^0,\ \omega^1 \in \theta(\omega)$.

Therefore, $\breve{\omega}_0^0$ and $\breve{\omega}_0^1$ belong to θ_1. Then minimality of θ_1 implies $\theta_1 = \theta(\breve{\omega}_0^0) = \theta(\breve{\omega}_0^1)$. The proposition is proved.

In the sequel, we will denote by p the projection of $\theta(\omega) \times Z_2$ onto $\theta(\omega)$,

$$p(y, i) = y,\ y \in \theta(\omega),\ i \in Z_2. \tag{39}$$

Now, assume that ω and η are m-Toeplitz sequences with the same sequence of lengths $(m.\ell_t)_{t\geq 0}$, and let $(\alpha_t)_{t\geq 0}$ and $(\beta_t)_{t\geq 0}$ be the associated sequences corresponding to (33).

Let $T\ : (\theta(\omega), S) \to (\theta(\eta), S)$ be a topological isomorphism, assume T is over $h_0 \in G$. Then (36) implies $T(\theta_h^{(\omega)}) = \theta_{h+h_0}^{(\eta)},\ \ h \in \widetilde{Z}$. This means $h_0 \in \widetilde{Z}$. By virtue of Theorem 2.1 and Remark 3.1, we obtain ;

Theorem 4.1. *The Toeplitz flows* $(\theta(\omega), S)$ *and* $(\theta(\eta), S)$ *are topologically isomorphic if and only if there exists* $t_0 \geq 0$ *and a block* B *over* Z_2, $|B| = m$, *such that* $\omega^{(t+1)} + \eta^{(t+1)} = \ldots BB \bigwedge BBB \ldots B \ldots,\ t = t_0$ *where* $\omega^{(t+1)}$ *and* $\eta^{(t+1)}$ *are the* T^0-*sequences defined by* $(\alpha_u)_{u\geq t+1}$ *and* $(\beta_u)_{u\geq t+1}$ *corresponding to (33) respectively.*

Using the same arguments as in [Bu - Kw - 1], assuming that for infinitely many t's, $\ell_{t+1}\ /\ \ell_t$ is even, we have the following ;

Proposition 4.2. *If $\widetilde{T}\ :(\widetilde{\theta}(\omega),S_\varphi)\to(\widetilde{\theta}(\eta),S_\varphi)$ is a topological isomorphism then there exists an isomorphism $T\ :(\theta(\omega),S)\to(\theta(\eta),S)$ such that ;*

$$p_2\circ\widetilde{T}=T\circ p_1, \tag{40}$$

where $p_1,\ p_2$ are the projections of (39) corresponding to ω and η respectively. Conversely, each isomorphism T can be lifted to some isomorphism $\tilde{T}$ satisfying (40).

Notice that the first part of the proposition is a special case of Lemma 2, [Roj].

IV.2.–Generalized Morse sequences.

We are now in position to apply the results of part 4.1 to the class of topological flows induced by generalized Morse sequences.

Let $n=0,1,\dots,\ n=\sum_{i=0}^{\infty}e_i(n).2^i,\ e_i(n)=0,1$. We have $e_i(n)=0$ if $i>[\log n/\log 2]$ (integer part of). Take a finit block $u=u_{\ell-1}\dots u_0$ over $\{0,1,\wedge\}$ such that $u_j=1$ for some $0\le j<\ell$. Define ;

$$\begin{cases}\mu(u,n)=\text{card}\{i\ge 0,\ \forall 0\le j<\ell,\ u_j\neq\wedge\Rightarrow u_j=e_{j+i}(n)\},\text{ and}\\ \\ a_u(n)\equiv\mu(u,n)(mod 2).\end{cases}$$

Metric properties of such sequences have been studied in the special case $u=1\Lambda\dots\Lambda 1$ in [Al-Li], were they are called generalized Rudin-Shapiro sequences. Following [Ch - Ka - MeFr - Ra], we shall say that the sequence a_u is a generalized Morse sequence. Taking $u=1$, we obtain the Morse-Thue sequence and $u=11$, the Rudin-Shapiro sequence.

There is a simple way of computing successive fragments of a_u. Suppose that $\ell\ge 2$. Define a subset $F(u)\subset\{0,1,\dots,2^{\ell-1}-1\}$ in such a way that

$$j\in F(u)\text{ if and only if }a_u(j)+a_u(j+2^{\ell-1})=1,\ \ 0\le j<2^{\ell-1}.$$

Notice that $F(u)$ is not empty.

Let us denote $m=2^{\ell-1}$. Take $k\ge\ell-1$ and write ;

$$a_u\!<0,2^k-1>=B_k[0]\dots B_k[m-1], \tag{41}$$

where $B_k[0],\dots,B_k[m-1]$ are blocks over Z_2 with $|B_k[j]|=2^{k-\ell+1},\ \ 0\le j<m$. In the sequel we need operations over blocks.

If $C = C(0)\dots C(k-1) \in \{0,1\}^k$, by $\widetilde{C}$ we denote *the mirror of* C, i.e

$$\widetilde{C}(i) = 1 + C(i), 0 \le i < k\ ;$$

by $\widehat{C}$, we mean a block such that $|\widehat{C}| = k-1$ and

$$\widehat{C}(n) = C(n+1) - C(n), n = 0,\dots,k-2.$$

Now, it is not hard to see that ;

$$a_u\!< 2^k, 2^{k+1}-1 >= \overline{B}_k[0]\dots\overline{B}_k[m-1], \tag{42}$$

where

$$\overline{B}_k[j] = \begin{cases} B_k[j] \text{ if } j \notin F(u) \\ \\ \tilde{B}_k[j] \text{ if } j \in F(u). \end{cases}$$

The equality (42) means that the sequence a_u is completely determined by its initial part $a_u\!< 0, 2^{\ell-1}-1 >$ and by the set $F(u)$. Notice that if $\ell = 1$, then $u = 1$ and (42) is valid with $F(u) = \{0\}$.

Proposition 4.3. *The flow $(\theta(a_u), S)$ is a Z_2-extension of a Toeplitz flow.*

Proof. The sequence a_u determines a m-Toeplitz sequence $\omega = \omega(u)$. Namely, let $A_s[j] = \widehat{B}_{s+\ell}[j],\ s = 0,1,\dots,\ j = 0,1,\dots,m-1$ and

$$A_s = A_s[0] \wedge A_s[1] \wedge \dots \wedge A_s[m-1] \wedge . \tag{43}$$

The condition (42) implies that the sequence $(A_s)_{s\ge0}$ satisfies the conditions (A) and (B) with $|A_s| = m.2^{s+1}$.

We will prove that $\omega = \omega(u)$ defined by the sequence of blocks $(A_s)_{s\ge0}$ is a m-Toeplitz sequence, i.e that (35) holds. It follows from the above construction that ;

$$\omega(n) = a_u(n+1) - a_u(n),\ n = 0,1,\dots. \tag{44}$$

Fix $s \ge 0$. If $F(u) \ne \{0,1,\dots,2^{\ell-1}-1\}$, then (41), (42) and (43) imply $A_{s+s_0}(j) \ne A_{s+s_0}(j + 2^{s+1}.m)$ for some $j,\ 0 \le j < 2^{s+1}.m$ and some $s_0 \ge 1$.

If $F(u) = \{0,1,\dots,2^{\ell-1}-1\}$, then $A_{s+s_0+1}(2^{s+1}.m-1) \ne A_{s+s_0+1}(2^{s+2}.m-1)$. Thus there are places $j_1,\ j_2 \ge 0,\ j_1 \ne j_2$, in ω_{s+s_1} (see(34)), $s_1 = s_0+1$, such that

$$\omega_{s+s_1}(j_1) \ne \omega_{s+s_1}(j_2).$$

Then we conclude that the sets

$$\begin{cases} V_{0,s+t} = \{k \geq 0, \omega_{s+t}(k) = 0\} \\ \text{and} \\ V_{1,s+t} = \{k \geq 0, \omega_{s+t}(k) = 1\} \end{cases}$$

are infinite for every $t \geq s_1$.

Now, we choose sufficiently large $s_2 \geq s_1$ such that the sequence $(\omega_{s+s_2}(k))_{k\geq 0}$ is a subsequence of $(\omega_s(m.2^{s+1}.k-1))_{k\geq 0}$. Then (45) for $t = s_2$ implies (35). In this way $\omega = \omega(u)$ is a m-Toeplitz sequence. Proposition 4.1 implies that the Z_2-extension $(\widetilde{\theta}(\omega), S)$ is topologically isomorphic to $(\theta(\check{\omega}_0^0), S)$ where $\check{\omega}_0^0, \check{\omega}_0^1$ are defined in (37).

Next (44) implies

$$a_u = \check{\omega}_0^0 < 0, \infty) \Big(\text{or } a_u = \check{\omega}_0^1 < 0, \infty)\Big).$$

The above equalities and (38) imply $\theta(a_u) = \theta(\check{\omega}^0) = \theta(\check{\omega}^1)$. This ends the proof of proposition 4.3.

Now, let $u' = u'_{\ell-1} \dots u'_0$ be another block over $\{0, 1, \wedge\}$ of the same length ℓ such that $u'_j = 1$ for some $0 \leq j < \ell$. Let us associate to it as previously $\alpha_{u'}$ and $\omega' = \omega(u')$. Recall that $F(u) = \{0 \leq j < m \ , a_u(j) + a_u(j+m) = 1\}$.

Theorem 4.2. *The flows $(\theta(a_u), S)$ and $(\theta(a_{u'}), S)$ are topologically isomorphic if and only if $F(u) = F(u')$.*

Proof. According to proposition 4.2 and proposition 4.3, $(\theta(a_u), S)$ and $(\theta(a_{u'}), S)$ are topologically isomorphic if and only if $(\theta(\omega), S)$ and $(\theta(\omega'), S)$ are. By using theorem 4.1, we conclude in an easy way that the last condition is equivalent to $F(u) = F(u')$. Theorem is proved.

Remark 4.1. *Of course, $u = u' \Rightarrow F(u) = F(u')$. But the converse implication is false : let $u = 01,\ u' = 10$, then $F(u) = F(u') = \{0\}$. Let us take some generalized Rudin-Shapiro sequences ; let $u = 1\Lambda \dots \Lambda 1,\ u' = 1\Lambda \dots \Lambda 0$; then 0 belongs to $F(u')$ and not to $F(u)$. Thus the associated flows are not isomorphic.*

References.

[Al - Li] : J.P. Allouche & P. Liardet, *Generalized Rudin-Shapiro sequences*, Acta Mathematica, 1991.

[Aus] : J. Auslander, Minimal flows and their extensions, *North-Holland, Mathematics Studies, 153.*

[Bu - Kw - 1] : W. Butatek & J. Kwiatkowski, *The topological centralizers of Toeplitz flows and there Z_2-extensions*, Publ. Math., vol 34 (1) (1990), 45-65.

[Bu - Kw - 2] : W. Butatek & J. Kwiatkowski, *Strictly ergodic Toeplitz flows with positive entropy and trivial topological centralizers*, to appear in Studia. Math.

[Ch - Ka - MeFr - Ra] : G. Christol, T. Kamae, M. Mendes-France & G. Rauzy, *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. S.M.F, n.108, 1980, 401-419.

[Gri] : C. Grillenberger, *Construction of strictly ergodic systems. I. Given entropy*, Z. Wahr. Verw. Geb., n.25(1972-1973), 323-334.

[He - Ro] : E. Hewitt & K.A. Ross, Abstract harmonic analysis, Toma I, *Mathematischen Wissenschaften, Band 115, 1963.*

[Ja - Ke] : K. Jacobs & M. Keane, $0-1$ *sequences of Toeplitz type*, Z. Wahr. Verw. Geb., n.13 (1969), 123-131.

[Lem] : M. Lemańczyk, *Toeplitz Z_2-extensions.*, Annales I. H. P., Vol. 24 (1988), 1-43.

[Pau] : M.E. Paul, *Construction of almost automorphic minimal flows*, General Topology Appl., n. 6 (1976), 45-56.

[Roj] : T. Rojek, *The classification problem in Toeplitz Z_2-extensions*, Compo. Math., n.72 (3) (1989), 341-358.

[Wal] : P. Walters, *Affine transformations and coalescence*, Math. Syst. Th., n.8 (1) (1974), 33-44.

[Wil] : S. Williams, *Toeplitz minimal flows which are not uniquely ergodic*, Z. Wahr. Verw. Geb., n.67 (1984), 95-107.

I.2. Classification topologique des suites de Morse généralisées.

Dans la dernière partie de [Kw-La], Theorem 4.2, une condition nécessaire et suffisante est donnée pour l'isomorphisme topologique des flots associés à deux suites de Morse généralisées dont les mots généralisés non triviaux associés sont de mêmes longueurs.

Ce Théorème donne en fait une classification topologique complète pour les flots associés à ces suites ; en effet, si $w = w_0 \dots w_r$ est un mot généralisé non trivial sur Z_2, alors pout tout entier $t \geq 1$, $w\Lambda^t$ est tel que $a_w = a_{w\Lambda^t}$; nous pouvons donc toujours nous ramener au cas où les mots sont de longueurs égales.

Il s'appuie de façon essentielle sur l'équivalence entre l'isomorphisme topologique de deux Z_2-extensions de flots de $m-$Tœplitz et l'isomorphisme topologique des deux flots de $m-$Tœplitz (voir [Kw-La] pour les notations). C'est la Proposition 4.2 de [Kw-La]. Le Théorème 4.1 qui la précède est une application directe du Théorème d'isomorphisme 2.2 de [Kw-La].

Nous allons ici d'abord démontrer cette proposition. Ensuite, en application de la classification topologique de [Kw-La], une classification topologique pour les flots de Rudin-Shapiro généralisés étudiés dans [Al-Li] est donnée, plus explicite.

La Proposition 4.2 de [Kw-La] découle dans le cas des endomorphismes d'adaptations de Proposition 1, Part 2, Theorem 2, Part 3 de [Bu-Kw-2]. Il est écrit ;

"Using the same arguments as in [Bu - Kw - 1], assuming that for infinitely many t's, $\ell_{t+1} \,/\, \ell_t$ is even, we have the following ;

Proposition 4.2. *If* $\tilde{T}\ : \left(\tilde{\Theta}(\omega), S_\varphi\right) \to \left(\tilde{\Theta}(\eta), S_\varphi\right)$ *is a topological isomorphism then there exists an isomorphism* $T\ : (\Theta(\omega), S) \to (\Theta(\eta), S)$ *such that ;*

$$p_2 \circ \tilde{T} = T \circ p_1, \tag{40}$$

where $p_1,\ p_2$ *are the projections of* (39) *corresponding to* ω *and* η *respectively. Conversely, each isomorphism* T *can be lifted to some isomorphism* $\tilde{T}$ *satisfying* (40)."

Preuve. Montrons d'abord la première partie de la Proposition, c'est à dire que pour tout isomorphisme topologique $\tilde{T}\ : \left(\tilde{\Theta}(\omega), S_\varphi\right) \to \left(\tilde{\Theta}(\eta), S_\varphi\right)$, il existe un isomorphisme topologique $T\ : (\Theta(\omega), S) \to (\Theta(\eta), S)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif ;

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{\Theta}(\omega), S_\varphi) \arrow[r, "\tilde{T}"] \arrow[d, "p_1"'] & (\tilde{\Theta}(\eta), S_\varphi) \arrow[d, "p_2"] \\
(\Theta(\omega), S) \arrow[r, "T"] & (\Theta(\eta), S)
\end{tikzcd}$$

Appelons (G, t_e) la "$(m\ell_t)$–adic adding machine". C'est le facteur équicontinu maximal commun aux deux flots $(\Theta(\omega), S)$ et $(\Theta(\eta), S)$. Appelons F_ω et F_η les applications correspondantes. Soit $a \in G$: soit $\Delta_a \subset G \times G$ défini par

$$\Delta_a = \{ \ (g, g + a), \ g \in G \ \} \, .$$

Les ensembles Δ_a, $a \in G$, sont fermés, $t_e \times t_e-$invariants, et minimaux. Considérons alors la famille d'ensembles $\tilde{\Delta}_a$, $a \in G$, définis par

$$\tilde{\Delta}_a = (p_1 \times p_2)^{-1} \left((F_\omega \times F_\eta)^{-1}(\Delta_a) \right) .$$

Ils sont fermés, $S_\varphi \times S_\varphi-$invariants, deux à deux disjoints, et

$$\bigcup_{a \in G} \tilde{\Delta}_a = \tilde{\Theta}(\omega) \times \tilde{\Theta}(\eta).$$

Soit alors $\tilde{T}$ un isomorphisme topologique. Le graphe Γ de $\tilde{T}$ est un sous–ensemble minimal de $\left(\tilde{\Theta}(\omega) \times \tilde{\Theta}(\eta), S_\varphi \times S_\varphi \right)$ et donc est contenu dans un $\tilde{\Delta}_a$, i.e.,

$$(\alpha) \qquad \tilde{T} \left\{ (F_\omega^{-1}(g), i), \ i \in \{0, 1\} \right\} = \left\{ (F_\omega^{-1}(g + a), i'), \ i' \in \{0, 1\} \right\} ,$$

pour tout $g \in G$ et $i = 0, 1$. Nous disons alors que $\tilde{T}$ est au-dessus de a dans G. Soit G_0 l'ensemble des $g \in G$ tel que, équivalemment, $F_\omega^{-1}(g)$ ou $F_\eta^{-1}(g)$ soit un singleton, c'est à dire, selon [Wil], que la fibre ne contienne qu'une suite de Tœplitz. Soit $g \in G_0 \cap (G_0 - a)$. Il en existe dans le cas des $m-$Tœplitz. Alors $g + a \in G_0$ et donc, $\#\Theta_g = \#\Theta_{g+a} = 1$. Posons $\Theta_g = \{v\}$ et $\Theta_{g+a} = \{u\}$ (cf Notations des Preliminaries de [Kw-La], relation (10), page 16). Alors (α) entraine que

$$(\beta) \qquad \begin{cases} \tilde{T}(v, 0) = (u, \psi(v)), \\ \\ \tilde{T}(v, 1) = (u, 1 + \psi(v)). \end{cases}$$

où $\psi(v) = 0$ ou 1. Montrons à présent que (β) a lieu pour tout $\gamma \in \Theta(\omega)$. La minimalité du flot $(\tilde{\Theta}(\omega), S_\varphi)$ entraine qu'il existe une suite d'entiers $r_n \to \infty$ telle que

$$(\gamma, 0) = \lim_{n \to +\infty} S_\varphi^{r_n}(v, 0).$$

Alors

$$\tilde{T}(\gamma, 0) = \lim_{n \to +\infty} \tilde{T} \left(S_\varphi^{r_n}(v, 0) \right) = \lim_{n \to +\infty} S_\varphi^{r_n}(u, \psi(v)) = (u_o, j),$$

et d'autre part

$$\tilde{T}(\gamma,1)=\lim_{n\to+\infty}\tilde{T}\left(S_{\varphi}^{r_n}(v,1)\right)=\lim_{n\to+\infty}S_{\varphi}^{r_n}(u,1+\psi(v))=(u_o,1+j).$$

car $S_{\varphi}^{r_n}(w,j')=(w_n,i_n)$ entraine $S_{\varphi}^{r_n}(w,1+j')=(w_n,i_n+1)$, pour tous $j,j',\in Z_2,\ w\in\Theta(\omega)$.

Ainsi (β) devient vraie pour tout $\gamma\in\Theta(\omega)$, et nous pouvons alors réécrire (β) sous la forme

$$\tilde{T}(\gamma,i)=(T(\gamma),i+\psi(\gamma)),$$

$i\in Z_2,\ \gamma\in\Theta(\omega)$. Il est alors standard de conclure au fait que $T\ :(\Theta(\omega),S)\to(\Theta(\eta),S)$ est un facteur et que la fonction $\psi\ :\Theta(\omega)\to Z_2$ est continue et vérifie

$$(\lambda)\qquad \psi(\gamma)+\left(T(\gamma)\right)(0)=\gamma(0)+\psi\left(\left(S(\gamma)\right)\right),$$

$\gamma\in\Theta(\omega)$.

Pour la réciproque, la relation (36) de [Kw-La] nous dit qu'un isomorphisme topologique $T\ :(\Theta(\omega),S)\to(\Theta(\eta),S)$ ne peut être qu'au-dessus d'un rationnel.

Il nous suffit donc de montrer que tout isomorphisme T au-dessus de 0 dans G peut se relever en un isomorphisme topologique $\tilde{T}\ :(\tilde{\Theta}(\omega),S_{\varphi})\to(\tilde{\Theta}(\eta),S_{\varphi})$ au-dessus de 0 toujours tel que la relation (40) de la Proposition 4.2 ait lieu.

Définissons alors une fonction $\Sigma_{t_0}\ :\Theta(\omega)\to Z_2$ par, si $\gamma\in\Theta(\omega)$,

$$\Sigma_{t_0}(\gamma)=\sum_{i=-m\ell_{t_0}}^{-1}\Big((S\gamma)(i)+\gamma(i)\Big),$$

pour un t_0 de Theorem 2.2 de [Kw-La] appliqué à T.

Cette somme est, d'aprés le Theorem 4.1, indépendante de γ et vaut soit 0 soit 1. Si elle vaut 1, il existe par hypothèse $t>t_0$ pour lequel $\ell_t\ /\ \ell_{t-1}$ est pair. Alors pour ce t, la somme Σ_t vaudra 0 dans Z_2.

Ainsi, nous pouvons choisir un entier t_0 pour le Theorem 2.2 tel que $\Sigma_{t_0}=0$. Pour $\gamma\in\Theta(\omega)$, posons $F_\omega(\gamma)=(n_t(\gamma))_{t\geq 0}$, où la suite $(n_t(\gamma))_{t\geq 0}\in\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ est telle qu'en page 15, relations (5) et (6) de [Kw-La]. Alors définissons la fonction $\psi\ :\Theta(\omega)\longrightarrow Z_2$, avec la somme vide égale à 0, pour $\gamma\in\Theta(\omega)$, par

$$\psi(\gamma)=\sum_{i=-n_{t_0}}^{-1}\Big(T(\gamma)(i)+\gamma(i)\Big).$$

Alors la fonction ψ est continue sur $\Theta(\omega)$ à valeurs dans Z_2 et vérifie la condition (λ). Posons alors, pour $\gamma \in \Theta(\omega)$ et $i \in Z_2$,

$$\tilde{T}(\gamma, i) = (T(\gamma), i + \psi(\gamma)).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que cette fonction $\tilde{T}$ vérifie les conditions annoncées dans la réciproque de la Proposition 4.2, pour l'isomorphisme T supposé. ■

Intéressons nous à présent aux suites de Rudin-Shapiro généralisées, étudiées dans [Al-Li], et qui sont des cas particuliers des suites de Morse généralisées que nous considérons ici. Elles sont définies par des mots généralisés non triviaux de la forme $w = a\Lambda^r b$, où r est un entier positif ou nul, et la paire (a, b) est dans $\{0,1\}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Si B est un mot sur $Z_2 \cup \{\Lambda\}$, $B = B(0)\ldots B(b-1)$, notons B_{m_Λ} le mot sur $Z_2 \cup \{\Lambda\}$ de longueur b défini comme suit ;

$$B_{m_\Lambda}(i) = \begin{cases} B(i) \text{ si } B(i) = \Lambda, \\ \\ B(i) + 1 \text{ si } B(i) \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Nous pouvons, en vertu du Theorem 4.2 de [Kw-La], montrer le résultat suivant ;

Proposition I.2.1. *Soient $w = a\Lambda^r b$ et $w' = a'\Lambda^{r'} b'$ deux mots généralisés non triviaux sur Z_2. Alors les flots de Rudin-Shapiro généralisés associés, $(\Theta(a_w), S)$ et $(\Theta(a_{w'}), S)$, sont topologiquement conjugués si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée ;*

$$r = r' \text{ et } \begin{cases} w = w' \\ \text{ou} \\ w = w_{m_\Lambda}. \end{cases}$$

Preuve. Supposons $\ell := r - r' \geq 0$. Deux cas sont possibles ; ou bien $\ell = 0$, ou bien $\ell \neq 0$.

<u>Si $\ell = 0$</u>, si $w \neq w'$, il y a à nouveau deux possibilités ; ou bien $0 \in F(w)$, ou bien $0 \notin F(w)$.

–Si $0 \notin F(w)$, alors $w = 1\Lambda^r 1$ et comme $w \neq w'$, $w' = 1\Lambda^r 0$ ou $w' = 0\Lambda^r 1$. Alors $0 \in F(w')$ et les flots ne sont pas isomorphes en vertu de Theorem 4.2, [Kw-La].

–Si $w = 0\Lambda^r 1$ et $w' = 1\Lambda^r 0$. Alors pour tout $j \in [0, 2^{t+1}[$, $a_w(j) = 0$, et $a_w(j + 2^{t+1}) = 1 + e_0(j)$; aussi, $a_{w'}(j) = a_1(j)$, et $a_{w'}(j + 2^{t+1}) = a_{w'}(j) + 1 + e_0(j)$; donc $F(w) = F(w') = \left\{ j \in [0, 2^{t+1}],\ e_0(j) = 0 \right\}$, et les flots sont isomorphes.

Si $\ell > 0$, $r \neq 0$. Posons $v = a'\Lambda^{r'}b\Lambda^{\ell}$. Alors $\Big(\Theta(a_{w'}), S\Big) = \Big(\Theta(a_v), S\Big)$ et donc nous n'avons, toujours d'aprés le Theorem 4.2 de [Kw-La], qu'à comparer $F(w)$ et $F(v)$.

–Si $w = 1\Lambda^r 1$, $1 \in F(w)$ et $0 \notin F(w)$. Alors quelque soit la paire $(a', b') \in \{0,1\}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\Big(1 \in F(w) \text{ et } 0 \notin F(w)\Big) \Rightarrow F(w) \neq F(v),$$

puisque $\ell \neq 0$, et les flots ne sont pas isomorphes.

–Si $w = 0\Lambda^r 1$, alors $2^{r+1} - 1 \notin F(w)$, $1 \notin F(w)$; soit m le nombre dont le développement binaire, écrit avec une queue infinie de 0 à droite, est $01^r 0^{\mathbf{N}}$: alors $m \in F(w)$ et $m \notin F(0\Lambda^{r'}1\Lambda^{\ell})$, $2^{r+1} - 1 \in F(1\Lambda^{r'}1\Lambda^{\ell})$, $1 \in F(1\Lambda^{r'}0\Lambda^{\ell})$; ainsi pour chacun des trois cas possibles $F(w) \neq F(v)$, et les flots ne sont pas isomorphes.

–Si $w = 1\Lambda^r 0$, $F(w) = \Big\{ j \in [0, 2^{t+1}],\ e_0(j) = 0 \Big\}$; alors si $v = 1\Lambda^{r'}1\Lambda^{\ell}$, $0 \notin F(v)$; si $v = 1\Lambda^{r'}0\Lambda^{\ell}$, $1 \in F(v)$; enfin, si $v = 0\Lambda^{r'}1\Lambda^{\ell}$, soit y l'entier dont le développement en base deux s'écrit $01^r 0^{\mathbf{N}}$; alors $y \in F(w)$ et $y \notin F(v)$, et les flots ne sont pas isomorphes.

Tous les cas ont été examinés. ■

I.3. Stricte ergodicité d'un flot de Tœplitz.

Nous allons donner ici une condition suffisante de stricte ergodicité d'un flot de Tœplitz, qui s'appuie sur un contrôle des apparitions des $t-$symboles dans les $t+n-$symboles.

Suivant les notations de l'introduction, soitω une suite de Tœplitz définie à l'aide de suites périodiques $\text{Per}_0 B_t$, $t \geq 0$, où la suite de mots $(B_t)_{t\geq 0}$ vérifie les conditions (T) de la page 2, avec $l_{-1} = 1$, $\ell(B_t) = l_t$, et $\lambda_t = l_t / l_{t-1}$. Nous noterons $St(\omega) = (l_t)_{t\geq 0}$ la période de structure de ω et $sam(\omega) = (B_t)_{t\geq 0}$ la suite de mots sur $A \cup \{\Lambda\}$ vérifiant les conditions ci-dessus ; le l_t- squelette de ω est alors, pour chaque $t \geq 0$, l'ensemble $\{p \in \mathbf{Z},\ \text{Per}_0\ B_t(p) \neq \Lambda\}$ (cf [Wil]).

Soit A^* l'ensemble des mots sur l'alphabet A, le mot vide étant désigné par E. Soit $M \in A^*$; nous dirons que M apparaît dans ω, et nous noterons $M \prec \omega$, si il existe un entier i tel que $\omega < i, i + \ell(M) - 1 >= M$. Soit $W(\omega)$ l'ensemble des $M \in A^*$ tels que $M \prec \omega$.

Le cylindre de mot M basé en $p \in \mathbf{Z}$ est noté $_p[M]$, et est défini par

$$_p[M] = \{\ \gamma \in W(\omega),\ \gamma < p, p + \ell(M) - 1 >= M\ \}.$$

La fonction indicatrice $1_{_p[M]}$ est continue de $\Theta(\omega)$ dans $\mathbf{R}$. Notons

$$\Sigma(M,p,k) = \frac{1}{k} \sum_{0\leq g<k} 1_{_p[M]} \circ S^g(\omega).$$

Un argument classique en dynamique symbolique dit que le flot $\big(\Theta(\omega), S\big)$ est strictement ergodique si et seulement si pour tout $M \in W(\omega)$, la suite $\big(\Sigma(M,p,k)\big)_{k\geq 1}$ converge uniformément en $p \in \mathbf{Z}$.

Soient B et C deux mots de A^*, tels que $\ell(B) < \ell(C)$; la fréquence relative d'occurence de B dans C est définie par la formule suivante ;

$$fr(B,C) = \frac{\#\{\ 0 \leq i < \ell(C) - \ell(B) + 1,\ C < i, i + \ell(B) - 1 >= B\ \}}{\ell(C) - \ell(B) + 1}.$$

Remarquons qu'alors $\Sigma(M,p,k) = fr(M, \omega < p, p + k + \ell(M) - 2 >)$. Si à présent nous prenons les mots $B \in W_t(\omega)$ et $C \in W_{t+s}(\omega)$, définissons ;

$$Ap(B,C) = \frac{\#\{\ 0 \leq u < l_{t+s}/l_t,\ C < u.l_t, (u+1).l_t - 1 >= B\ \}}{l_{t+s}/l_t}.$$

Soit $(k_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs ; posons, pour tout $n \geq 0$, $m_n = l_{k_{n+1}} / l_{k_n}$. Alors nous avons la condition suffisante suivante de stricte ergodicité du flot $\big(\Theta(\omega), S\big)$;

Théorème I.3.1. *$\big(\Theta(\omega), S\big)$ est strictement ergodique si pour tous $n \geq 0$, $B \in W_{k_n}(\omega)$, $C, C' \in W_{k_{n+1}}(\omega)$, $Ap(B,C) = Ap(B,C')$.*

Preuve. Laissons n fixe pour le moment. Remarquons d'abord que la condition énoncée dans le Théorème est équivalente à la suivante ; pour tous $n \geq 0$, $s \geq 0$, $B \in W_{k_n}(\omega)$, $C, C' \in W_{k_{n+s}}(\omega)$, $Ap(B,C) = Ap(B,C')$. Si nous posons

$$D(B,q,t) = \frac{1}{t} \sum_{0 \leq u < t} 1_{{}_{(q+u).l_{k_n}}[B]}(\omega),$$

pour $q \in \mathbf{Z},\ n \geq 0,\ t \geq 1$, la suite $\big(D(B,q,t)\big)_{t \geq 1}$ converge uniformément en q lorsque $t \to +\infty$; notons $\tau(B)$ la limite correspondante.

Soit $M \in W(\omega)$ et $\varepsilon > 0$. Soit $n \geq 0$ tel que $l_{k_n} \geq \ell(M)$. Soit $p \in \mathbf{Z}$. Soit $u(p) \in \mathbf{Z}$ tel que $u(p).l_{k_n} \leq p < (u(p)+1).l_{k_n}$. Soit ensuite $k \geq l_{k_n}$. Soit $i(k) \geq 1$ tel que $i(k).l_{k_n} \leq k < (i(k)+1).l_{k_n}$. Alors

$$|k\Sigma(M,p,k) - i(k)l_{k_n}\Sigma(M, u(p).l_{k_n}, i(k).l_{k_n}| \leq (k - i(k).l_{k_n}) + (p - u(p).l_{k_n}) \leq 2l_{k_n},$$

et donc

$$|\Sigma(M,p,k) - \Sigma(M, u(p).l_{k_n}, i(k).l_{k_n}| \leq \left|1 - \frac{k}{i(k)l_{k_n}}\right| \Sigma(M,p,k) + \frac{2}{i(k)} \leq \frac{3}{i(k)}.$$

Pour tout $n \geq 0$, choisissons $k_0(n) \geq l_{k_n}$ tel que $k \geq k_0(n) \Rightarrow \dfrac{3}{i(k)} < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Posons

$$r = l_{k_n}.$$

Pour estimer $\Sigma(M, u(p).r, i(k).r)$, calculons $i(k).r.\big(\Sigma(M, u(p).r, i(k).r)\big)$, qui dénombre les apparitions du mot M dans le mot $\omega< u(p).r, u(p).r + i(k).r + \ell(M) - 2 >$. A cet effet, calculons la somme suivante ;

$$S(m,p,k) = \sum_{B \in W_{k_n}(\omega)} i(k).fr(M,B).(r - \ell(M) + 1).D(B, u(p), i(k)).$$

$S(M,p,k)$ compte les apparitions de M dans un k_n-symbole de ω apparaissant dans $\omega< u(p).r, u(p).r + i(k).r - 1 >$ en position $s.r$, $0 \leq s < i(k)$. Les apparitions de M dans $\omega< u(p).r, u(p).r + i(k).r + \ell(m) - 2 >$ qui n'ont pas été prises en compte dans $S(M,p,k)$, correspondent aux apparitions chevauchantes ou terminales, et sont au plus au nombre de $(\ell(M)+1).i(k)$. Nous avons donc

$$|S(M,p,k) - r.i(k).\Sigma(M, u(p).r, i(k).r)| \leq (\ell(M)+1).i(k).$$

Nous en déduisons

$$\left|\frac{S(M,p,k)}{r.i(k)} - \Sigma(M, u(p).r, i(k).r)\right| \leq \frac{(\ell(M)+1)}{r}.$$

Rappelons que $r = l_{k_n}$ et prenons $n \geq 0$ tel que $\dfrac{(\ell(M)+1)}{r} < \dfrac{\varepsilon}{3}$. L'entier n est fixé. $W_{k_n}(\omega)$ étant fini, prenons $k \geq k_0(n)$ tel que pour tout $B \in W_{k_n}(\omega)$,

$$|\tau(B) - D(B, u(p), i(k))| .\#W_{k_n}(\omega) < \frac{\varepsilon}{3},$$

uniformément en p.

Nous avons $\displaystyle\sum_{B\in W_{k_n}(\omega)} \tau(B) = 1$, et $fr(M,B) \leq 1$. Alors l'inégalité triangulaire et les relations précédentes permettent de conclure, pour tous $p \in \mathbf{Z}$, $k \geq k_0(n)$,

$$\left|\sum_{B\in W_{k_n}(\omega)} \tau(B).fr(M,B) - \Sigma(M,p,k)\right| < \varepsilon.$$

La stricte ergodicité s'en déduit par condition de Cauchy uniforme. ■

I.4. Isomorphisme métrique des flots construits dans [Kw-La].

Dans le paragraphe 3.2 de [Kw-La], les suites de Tœplitz sont construites dont l'ensemble contiendra les éléments de la famille $\mathcal{F}$ du paragraphe 3. Pour construire ces suites, les $t-$symboles sont construits inductivement à l'aide d'un choix de permutations que nous notons Σ_{t+1} pour la $t+1^{\text{ième}}$ –étape. Toutes les suites construites le sont avec la même suite de choix $\left(\Sigma_{j+1}\right)_{j\geq 0}$.

Ainsi, un $(t+1)-$symbole B_{t+1} est déterminé par un unique élément σ_{t+1} de Σ_{t+1}. C'est cette régularité de la construction que nous employons pour démontrer le résultat suivant, où F_ω désigne le facteur équicontinu maximal associé à la suite ω ;

Theorem I.4.1. *Deux éléments quelconques ω et ω' de $\mathcal{F}$ sont tels qu'il existe une bijection $T : \Theta(\omega) \longrightarrow \Theta(\omega')$ bi-mesurable, telle que le diagramme suivant soit commutatif ;*

$$\begin{array}{ccc} \big(\Theta(\omega), S\big) & \xrightarrow{T} & \big(\Theta(\omega'), S\big) \\ \downarrow{\scriptstyle F_\omega} & & \downarrow{\scriptstyle F_{\omega'}} \\ (G, t_e) & \xrightarrow{Id_G} & (G, t_e) \end{array}$$

La preuve de ce Théorème repose sur le Lemme suivant ;

Lemme I.4.1. *Soit $\gamma \in \Theta(\omega)$. Posons $F_\omega(\gamma) = \big(n_t(\gamma)\big)_{t\geq 0}$. Pour tout $t \geq 0$ et tout $k \in \mathbf{Z}$, posons $\gamma_t(k) := \gamma < -n_t(\gamma) + k.l_t, -n_t(\gamma) + (k+1).l_t - 1 >$. Alors l'élément γ de $\Theta(\omega)$ est entièrement déterminé par la paire $\big(F_\omega(\gamma), (\gamma_t(0))_{t\geq 0}\big)$.*

Preuve de Lemme I.4.1. Supposons que $\gamma,\ \gamma' \in \Theta(\omega)$ et que $\big(F_\omega(\gamma), (\gamma_t(0))_{t\geq 0}\big) = \big(F_\omega(\gamma'), (\gamma'_t(0))_{t\geq 0}\big)$. Si $F_\omega(\gamma) = n.e$, pour un entier relatif n, alors la fibre au-dessus de $n.e$ dans $\Theta(\omega)$ est réduite à un point. Sinon, les deux suites $\big(n_t(\gamma)\big)_{t\geq 0}$ et $\big(l_t - n_t(\gamma)\big)_{t\geq 0}$ sont non bornées, et donc l'égalité $\big(\gamma_t(0)\big)_{t\geq 0} = \big(\gamma'_t(0)\big)_{t\geq 0}$ entraine $\gamma = \gamma'$. ■

Pour chaque $t \geq 0$, il existe une unique permutation σ_{t+1} de Σ_{t+1} telle que cette permutation serve à construire $\gamma_{t+1}(0)$ à l'aide d'éléments de $W_t(\omega)$ selon le procédé employé dans [Kw-La], paragraphe 3.2. Notons alors

$$B_{t+1}[\sigma_{t+1}, \omega] := \gamma_{t+1}(0),\ \sigma_{t+1}(\gamma) := \sigma_{t+1},\ \text{et } \Gamma = \prod_{t=0}^{+\infty} \Sigma_{t+1}.$$

Preuve de Théorème I.4.1. L'ensemble des suites $(\sigma_{t+1})_{t\geq 0} \in \Gamma$, telles qu'il existe $\gamma \in \Theta(\omega)$, $\big(\gamma_{t+1}(0)\big)_{t\geq 0} = \big(B_{t+1}[\sigma_{t+1}, \omega]\big)_{t\geq 0}$, sont les mêmes, indépendamment de ω. Ainsi, étant données deux suites $\omega, \omega' \in \mathcal{F}$, soit $T : \Theta(\omega) \longrightarrow \Theta(\omega')$ qui à la paire (ou au point, par Lemme I.3.1) $\Big(F_\omega(\gamma), \big(\sigma_{t+1}(\gamma)\big)_{t\geq 0}\Big)$ associe le point $T(\gamma) \in \Theta(\omega')$ tel que $\Big(F_{\omega'}(T(\gamma)), \big(\sigma_{t+1}(T(\gamma))\big)_{t\geq 0}\Big) := \Big(F_\omega(\gamma), \big(\sigma_{t+1}(\gamma)\big)_{t\geq 0}\Big)$. L'application T définie est bijective, la commutativité du diagramme et la bi-mesurabilité sont simples à vérifier. ■

I.5. Entropie topologique, majoration.

Soit ω une suite de Tœplitz telle que $St(\omega) = (l_t)_{t\geq 0}$, $sam(\omega) = (B_t)_{t\geq 0}$, et soit $W_t(\omega)$ l'ensemble des $t-$symboles associés pour chaque $t \geq 0$ (cf Introduction, I.1 et I.2 pour les notations et définitions).

L'entropie topologique de $\big(\Theta(\omega), S\big)$ est notée $h_{top}(\omega)$, voir par exemple [Gri] pour plus de détails concernant ses propriétés. Si $M_n(\omega)$ désigne l'ensemble des mots de longueur n apparaissant dans ω, l'entropie topologique $h_{top}(\omega)$ est par définition égale à $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\big(\# M_n(\omega)\big)}{n}$, laquelle limite existe toujours et est comprise entre 0 et $\log(\# A)$. Toutefois, comme il est apparu dans [Kw-La], en s'inspirant de [Gri], nous avons l'égalité

$$h_{top}(\omega) = \lim_{t\to+\infty} \frac{ln\big(\# W_t(\omega)\big)}{l_t}.$$

La régularité de la suite ω est donnée par

$$d(\omega) = \lim_{t} \frac{\#\{0 \leq i < l_t,\ B_t(i) \neq \Lambda\}}{l_t}.$$

Proposition I.5.1. $h_{top}(\omega) \leq \big(1 - d(\omega)\big).ln(\# A)$.

Preuve. Posons, pour tout $t \geq 0$, $d_t(\omega) = \#\{0 \leq i < l_t,\ B_t(i) \neq \Lambda\}$. Alors $\# W_t(\omega) \leq (\# A)^{l_t - d_t(\omega)}$, et le résultat en découle immédiatement. ■

Dans [Wil], tous les flots construits tels que $h_{top}(\omega) = \big(1 - d(\omega)\big).ln(\# A)$ sont des produits croisés du facteur équicontinu maximal avec $A^{\mathbf{Z}}$, et admettent le continuum de mesures ergodiques invariantes.

Il est possible de montrer que pour les flots construits dans [Kw-La], l'inégalité de la Proposition précédente est stricte. Les flots introduits en I.2 donnent une égalité, pour la même Proposition, et sont non-strictement ergodiques. Ainsi, nous sommes conduits à nous poser la question suivante ;

Question. ***Si la majoration de la Proposition I.5.1 est une égalité, le flot est-il nécessairement non-strictement ergodique ?***

II–Produits de Cantor généralisés.

Nous donnons ici une construction de flots de Tœplitz, sur l'alphabet à k lettres $A_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, d'entropie arbitraire, de facteur équicontinu maximal arbitraire, admettant le continuum de mesures ergodiques invariantes, et dont la fibration métrique est explicitée.

Comme dans le cas de [Kw-La], cette construction se fait par le contrôle simultané de la période de structure et des cardinalités des ensembles de $t-$symboles correspondants. Pour ce faire, nous effectuons un "développement de l'entropie selon le facteur équicontinu maximal".

Ce développement nous conduit à des produits de Cantor cas particuliers de ceux définis par Oppenheim ([Opp]), et des produits de Cantor généralisés qui sont fibrés.

Enfin, nous présentons [Lac].

.../...

II.1. Développement de l'entropie selon le facteur équicontinu maximal.

L'objectif est ici de construire des suites de Tœplitz de facteur équicontinu maximal arbitraire et d'entropie topologique arbitraire, d'une façon différente de celle employée dans [Kw-La]. L'esprit reste néanmoins le même puisque la construction se fait avec des blocs de mots bien contrôlés et bien emboités. Le résultat donnera des flots admettant le continuum de mesures ergodiques invariantes.

Nous avons vu dans I.1, "[Kw-La]", que le facteur équicontinu maximal est entièrement déterminé par la période de structure de la suite, d'aprés la construction de S. Williams.

Dans la partie I.5, nous avons vu que, étant donnée la période de structure, l'entropie topologique peut se contrôler au niveau de la suite des cardinalités des ensembles de $t-$symboles associés.

C'est ce que nous nous proposons de faire ci-aprés ; nous allons choisir une période de structure, ou encore une suite d'entiers $(p_t)_{t\geq 0}$, supérieurs ou égaux à 2, telle que pour tout $t \geq 0$, p_t divise p_{t+1} et $\lambda_t = \dfrac{p_t}{p_{t-1}} \geq 2$.

Posons $p_{-1} = 1$. Soit k un entier naturel ≥ 3. Soit h un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0, \log(k)[$ (h est destiné à être la valeur de l'entropie topologique des suites que nous construirons, et k la cardinalité de l'alphabet).

Nous construisons deux suites d'entiers $(r_j)_{j\geq 0}$ et $(t_j)_{j\geq 0}$ telles que si ω désigne la suite qui sera construite, sa période de structure sera la suite $(p_{t_j})_{j\geq 0}$, et si $W_j(\omega)$ est l'ensemble de ses $j-$symboles, $\#W_j(\omega) = k^{r_0 \cdots r_{j-1}}$.

$1^{\text{ère}}$ **étape.** Posons $r_{-1} = 1$. Soit t_0 le plus petit entier $t \geq 0$ tel que les conditions suivantes soient simultanément vérifiées ;

$$\begin{cases} (a): \quad p_t \geq k, \\ \\ (b): \quad \exists r \in [1, p_t - k] \text{ tel que } \dfrac{r-1}{p_t - 1}\log(k) \leq h < \dfrac{r}{p_t}\log(k). \end{cases}$$

Prenons $r_0 = r$ où r est l'unique entier apparaissant dans (b) pour $t = t_0$.

$2^{\text{ème}}$ **étape.** Soit $j \geq 0$ et supposons que les entiers $t_0 < t_1 < \cdots < t_j$ et $r_0, \ldots, r_j$ soient construits. Choisissons t_{j+1} tel que t_{j+1} soit le plus petit des entiers $t > t_j$ tels que les deux conditions suivantes soient simultanément vérifiées ;

$$(\Upsilon) \qquad \begin{cases} (\alpha) \quad \dfrac{p_t}{p_{t_j}} > 2^j, \\ (\beta) : \quad \exists r \in \left[1, \dfrac{p_t}{p_{t_j}} - k^{r_0 \cdots r_j}\right], \\ \qquad \dfrac{r-1}{\dfrac{p_t}{p_{t_j}} - 1} \log(k) \leq h \left(\displaystyle\prod_{i=0}^{j} \frac{p_{t_i}}{r_i p_{t_{i-1}}}\right) < \dfrac{r.p_{t_j}}{p_t} \log(k). \end{cases}$$

Posons alors $r_{j+1} = r$ où r apparait dans (β) pour $t = t_{j+1}$.

Deux cas sont possibles ; ou bien $E(h) = \{i \geq 0,\ r_j \geq 2\}$ est fini, ou bien il est infini. Dans le premier des deux cas, $h = 0 = \lim_j \dfrac{p_{t_j}}{p_{t_{j+1}}}$ d'aprés (α), et dans le second cas, la relation (β) de (Υ) entraine

$$\left| h - \log(k). \prod_{i=0}^{j+1} \frac{r_i.p_{t_{i-1}}}{p_{t_i}} \right| < \log(k). \frac{p_{t_j}}{p_{t_{j+1}}},$$

et (α) de (Υ) entraine que $p_{t_{j+1}} \big/ p_{t_j} \to +\infty$. Donc dans les deux cas,

$$h = \lim_{j \to +\infty} \log(k). \frac{r_0 \cdots r_j}{p_{t_j}}.$$

Fixons à présent les deux suites $(t_j)_{j \geq 0}$ et $(r_j)_{j \geq 0}$ construites ci-dessus.

II.2. Construction des suites de Tœplitz.

Pour construire les suites, nous les voyons comme limites de suites périodiques sur l'alphabet $\{0,1,\ldots,k-1\} \cup \{\Lambda\}$ (cf Introduction). Nous reprenons ici les notations introduites dans la Partie I. Nous allons construire une suite de Tœplitz ω telle que $St(\omega) = (p_{t_j})_{j\geq 0}$. Posons $A = \{0,1,\ldots,k-1\}$ et $\bar{A} = A \cup \{\Lambda\}$. Notons $\bar{A}^*$ le monoïde des mots sur $\bar{A}$ muni de la concaténation. Soit $M \in \bar{A}^*$, $M = M(0)\ldots M(m-1)$, $\ell(M) = m$. Nous noterons

$$\begin{cases} (i): \quad t(M) = \#\{\ 0 \leq i < m,\ M(i) = \Lambda\ \}, \\ \\ (ii): \quad \text{soit } t_1 < t_2 < \cdots < t_{t(M)} \text{ telle que pour tout } i \in [0,m[, \\ \qquad\qquad (M(i) = \Lambda) \iff (\exists j \in [1, t(M)],\ i = t_j). \end{cases}$$

Le nombre $t(M)$ associé au mot M sur $\bar{A}$ désigne le nombre d'apparitions de la lettre Λ dans le mot M, ou encore ce que nous appellerons le nombre de trous de M.

Avec ces notations, les trous de M étant indéxés en ordre croissant d'apparition, si N est un mot sur A tel que $\ell(N) = t(M)$, le mot noté $M(N)$ sera appelé le mot M rempli avec le mot N, et défini comme suit ;

$$\begin{cases} (1): \quad \ell(M(N)) = \ell(M),\ t(M(N)) = 0, \\ \\ (2): \quad \forall i \in [0, \ell(M)[, \ \begin{cases} M(i) \neq \Lambda \Rightarrow M(N)(i) = M(i), \\ M(i) = \Lambda \ \text{ et } \ i = t_j \Rightarrow M(N)(i) = N(j-1). \end{cases} \end{cases}$$

Posons ensuite, pour tout $j \geq 0$,

$$q_j = \frac{p_{t_j}}{p_{t_{j-1}}} - r_j.$$

En prenant pour le produit vide la valeur 1, nous avons $q_j \geq k^{r_0 \cdots r_{j-1}}$, d'aprés (Υ).

A présent, construisons une suite de mots $(B_t)_{t\geq 1}$ sur $\bar{A}$;

1$^{\text{ère}}$ **étape.** Posons $B_1 = x_0.\Lambda^{r_0}.x_1\ldots x_{q_0-1}$ où les x_i, $0 \leq i < q_0$, sont des lettres arbitrairement choisies dans A. Nous avons alors $\ell(B_1) = p_{t_0},\ t(B_1) = r_0,\ \#\{B_1(N),\ N \in A^{r_0}\} = k^{r_0}$.

2$^{\text{ème}}$ **étape.** Supposons que pour tout $1 \leq i \leq j$, les mots B_i aient été construits tels que $t(B_i) = r_0 \cdots r_{i-1},\ \ \ell(B_i) = p_{t_{i-1}}$. Choisissons alors $V_0, \ldots, V_{q_j-1} \in A^{r_0\cdots r_{j-1}}$ tels que $\{V_0, \ldots, V_{q_j-1}\} = A^{r_0\cdots r_{j-1}}$, et posons

$$B_{j+1} = B_j(V_0).B_j^{r_j}.B_j(V_1)\ldots B_j(V_{q_j-1}).$$

Alors $\ell(B_{j+1}) = p_{t_j},\ t(B_{j+1}) = k^{r_0 \cdots r_j},\ \#\{B_{j+1}(V),\ V \in A^{r_0 \cdots r_j}\} = k^{r_0 \cdots r_j}$.

La construction entraine que la limite

$$\omega = \lim_{j \to +\infty} \mathrm{Per}_0 B_j$$

existe et est une suite de Tœplitz sur A, telle que $St(\omega) = (p_{t_j})_{j \geq 0},\ sam(\omega) = (B_j)_{j \geq 1}$, et pour tout $j \geq 0$, l'ensemble des $j-$symboles de ω, $W_j(\omega)$, vérifie

$$W_j(\omega) = \{\ B_{j+1}(V),\ V \in A^{r_0 \cdots r_j}\ \}.$$

Posons, pour tout $j \geq 1$, $d_j(\omega) = \dfrac{\#\{0 \leq i < p_{t_{j-1}},\ B_j(i) \neq \Lambda\ \}}{p_{t_{j-1}}} = \dfrac{r_0 \ldots r_{j-1}}{p_{t_{j-1}}}$. La régularité de ω se calcule par (voir [Ja-Ke])

$$d(\omega) = \lim_{j \to +\infty} d_j(\omega),$$

et nous obtenons

$$1 - d(\omega) = \lim_{j \to +\infty} 1 - d_j(\omega) = \prod_{j=0}^{+\infty} \frac{r_j p_{t_{j-1}}}{p_{t_j}}.$$

D'autre part, comme pour tout $j \geq 0$, $\#W_j(\omega) = k^{r_0 \cdots r_j}$, nous avons, d'aprés les résultats de I.5 et II.1,

$$h_{top}(\omega) = \big(1 - d(\omega)\big).ln(\#A).$$

II.3. Fibration métrique.

Soit ω une des suites de Tœplitz construites précédemment (la construction précédente peut se faire de multiples façons, le choix étant possible à chaque étape pour les "V_i").

Notons (G, t_e) la "$(p_t)-$adic adding machine", et $F_\omega : \big(\Theta(\omega), S\big) \longrightarrow \big(G, t_e\big)$ le facteur équicontinu maximal associé au flot associé à ω (cf Partie I.1, Preliminaries de [Kw-La]).

Soit $\gamma \in \Theta(\omega)$, et $n \in \mathbf{Z}$; nous dirons que n est un site apériodique de γ si et seulement si il n'existe pas d'entier $p \geq 2$ tel que pour tout $m \in \mathbf{Z},\ \gamma(n+pm) = \gamma(n)$. Notons $Aper(\gamma)$ l'ensemble des sites apériodiques de γ.

Posons

$$D(\omega) = \{\gamma \in \Theta(\omega),\ -\inf Aper(\gamma) = \sup Aper(\gamma) = +\infty\ \}.$$

D'aprés [Wil], si ω n'est pas régulière, pour toute mesure μ de probabilité $S-$invariante sur $\big(\Theta(\omega), S\big)$, $\mu(D(\omega)) = 1$.

Dans le cas présent, si $h = 0$, la suite ω est régulière (d'aprés les résultats du paragraphe précédent), et les travaux de S. Williams nous indiquent que le flot associé est métriquement isomorphe à la "$(p_t)-$adic adding machine" ; si ω n'est pas régulière, d'un point de vue métrique, nous n'avons à considérer que la paire $(D(\omega), S)$.

Plaçons nous dans le cas où $h \neq 0$. Soit $\gamma \in D(\omega)$. Soit $i \in \mathbf{Z}$. Nous dirons que l'entier n_i est le $i^{\text{ème}}$ site apériodique de γ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes a lieu ;

$$\begin{cases} (c): \quad i \geq 0 \quad \text{et} \quad \#\left(Aper(\gamma) \cap [0, n_i]\right) = i+1, \\ \\ (d): \quad i < 0 \quad \text{et} \quad \#\left(Aper(\gamma) \cap [n_i, 0[\right) = -i. \end{cases}$$

Définissons l'application suivante ;

$$\begin{array}{ccc} D(\omega) & \xrightarrow{\eta} & A^{\mathbf{Z}} \\ \\ \gamma & \longmapsto & \eta(\gamma)(i) = \gamma(n_i),\ i \in \mathbf{Z}. \end{array}$$

Reprenant les notations de la Partie I.4, nous savons qu'un élément $\gamma \in D(\omega)$ est déterminé par la paire $\Big(F_\omega(\gamma), \big(\gamma_t(0)\big)_{t \geq 0}\Big)$ (cf Lemme I.4.1). Mais pour chaque $t \geq 0$, il existe un unique $V_t(\gamma) \in A^{r_0 \cdots r_t}$ tel que $\gamma_t(0) = B_{t+1}(V_t(\gamma))$. Un élément de $D(\omega)$ est donc déterminé par la paire $\Big(F_\omega(\gamma), \big(V_t(\gamma)\big)_{t \geq 0}\Big)$.

Avec les conditions $\#W_j(\omega) = k^{r_0 \cdots r_j},\ j \geq 0$,

$$\forall\ h \in F_\omega\big(D(\omega)\big),\ \forall\ u \in A^{\mathbf{Z}},\ \exists\ \gamma \in F_\omega^{-1}(h),\ \eta(\gamma) = u.$$

Posons

$$N(\omega) = \{ \ \gamma \in \Theta(\omega), \ 0 \in Aper(\gamma) \ \}.$$

Alors pour tout $\gamma \in \Theta(\omega)$,

$$\big(F_\omega(S\gamma), \eta(S\gamma)\big) = \begin{cases} \big(F_\omega(\gamma) + e, \eta(\gamma)\big) \Longleftrightarrow \gamma \notin N(\omega), \\ \\ \big(F_\omega(\gamma) + e, S\big(\eta(\gamma)\big)\big) \Longleftrightarrow \gamma \in N(\omega). \end{cases}$$

Comme d'autre part $F_\omega(\gamma) = F_\omega(\gamma') \Rightarrow Aper(\gamma) = Aper(\gamma')$ (cf [Wil]), nous pouvons définir $Aper(h)$ pour $h \in F_\omega(D(\omega))$, par $Aper(h) = Aper(\gamma)$, pour tout $\gamma \in F_\omega^{-1}(h)$. Définissons le flot mesurable $(G \times A^{\mathbf{Z}}, t_e \times S^\eta)$ par, pour tout $h \in G$ et tout $u \in A^{\mathbf{Z}}$,

$$t_e \times S^\eta(h,u) = \begin{cases} (h+e, u) \ \text{ si } \ 0 \notin Aper(h), \\ \\ (h+e, Su) \ \text{ si } \ 0 \in Aper(h). \end{cases}$$

Définissons l'application Φ de $D(\omega)$ dans $G \times A^{\mathbf{Z}}$ par

$$\Phi(\gamma) = \begin{cases} (F_\omega(\gamma), \eta(\gamma)) \ \text{ si } \ \gamma \in D(\omega) \\ \\ \big(F_\omega(\gamma), 0^{\mathbf{Z}}\big) \ \text{ si } \ \gamma \in \Theta(\omega) \setminus D(\omega). \end{cases}$$

Φ est mesurable, $\Phi \circ S = \Big(t_e \times S^\eta\Big) \circ \Phi$, et d'aprés les remarques faites en début de paragraphe, pour toute mesure μ $S-$invariante de probabilité sur $\big(\Theta(\omega), S\big)$, un isomorphisme métrique, si sur $(G \times A^{\mathbf{Z}}, t_e \times S^\eta)$ nous prenons soin de prendre la mesure image directe de μ par Φ. Nous obtenons ainsi la fibration métrique associée au facteur équicontinu maximal.

En particulier, suivant [Par], deux mesures ergodiques invariantes distinctes sur $\big(\Theta(\omega), S\big)$ étant de supports disjoints, et le nombre de ces mesures ne pouvant pas excéder le continuum, $\big(\Theta(\omega), S\big)$ admet autant de mesures ergodiques de probabilité $S-$invariantes que le flot symbolique $(A^{\mathbf{Z}}, S)$, c'est à dire le continuum.

D'aprés [Bel], et la forme fibrée obtenue pour $\big(\Theta(\omega), S\big)$, nous retrouvons la valeur de l'entropie topologique du flot par

$$h_{\text{top}}(\omega) = \big(1 - d(\omega)\big). \log(k),$$

puisque la mesure de $N(\omega)$ est, quelque soit μ une mesure de probabilité $S-$invariante sur $\Theta(\omega)$, toujours égale à $1 - d(\omega)$ (cf [Wil]).

II.4. Produits de Cantor généralisés suivant Oppenheim.

Dans le développement de l'entropie suivant le facteur équicontinu maximal, nous avons exposé un algorithme de type particulier pour développer la quantité $\dfrac{h}{\log(k)} \in [0,1[$ sous forme de produit infini de nombres rationnels (cf (Υ) de II.1).

Nous allons ici donner une variante de ce développement, où il est fait abstraction du facteur équicontinu maximal (la suite $(p_t)_{t\geq 0}$ n'intervient plus).

Soit k un entier ≥ 2 fixé. Soit $x \in [0,1[$. Considérons l'algorithme suivant, que nous appelons (FC_k) ;

(FC_k). **1^ère^ étape.** Soit $r_0(x)$ le seul entier ≥ 1 tel que $\dfrac{r-1}{r+k-1} \leq x < \dfrac{r}{r+k}$.

Posons $p_0(x) = r_0(x) + k$, et $q_0(x) = k$, et $\Pi_0(x) = \dfrac{r_0(x)}{r_0(x)+k}$.

2^ème^ étape. Définissons $q_{i+1}(x) = q_i(x)^{r_i(x)}$. Définissons $r_{i+1}(x)$ par

$$\frac{r_{i+1}(x)-1}{q_{i+1}(x)+r_{i+1}(x)-1} \leq x.\Pi_i(x)^{-1} < \frac{r_{i+1}(x)}{q_{i+1}(x)+r_{i+1}(x)}.$$

Posons $\Pi_{i+1}(x) = \Pi_i(x).\left(\dfrac{r_{i+1}(x)}{r_{i+1}(x)+q_{i+1}(x)}\right)$.

Notons $r(x)$ la suite $\big(r_i(x)\big)_{i\geq 0}$ que l'algorithme (FC_k) associe à x. Il s'avère que l'algorithme (FC_k) est un cas particulier de la famille d'algorithmes définis par Oppenheim dans [Opp], et donc nous avons toujours

$$x = \prod_{i=0}^{\infty} \left(\frac{r_i(x)}{r_i(x)+q_i(x)}\right).$$

Nous allons néanmoins examiner la vitesse de convergence de l'algorithme. Si p est un entier ≥ 2, posons, pour $x \in [0,1[$,

$$T_p(x) = x \cdot \left(\frac{r_0(x)+p}{r_0(x)}\right),$$

où $r_0(x)$ est l'entier déterminé par l'algorithme (FC_p) appliqué à x. Soit $r = (r_0, \ldots, r_{n-1}) \in \mathbf{N}^n$. Pour tout $0 \leq i \leq n$, posons $q_i(r) = k^{r_0 \cdots r_{i-1}}$, où le produit vide vaut 1. Définissons les $n-1$ compositions suivantes, pour tout $j \in [0, n-1[$;

$$C_j = C_j(r) = T_{q_j} \circ T_{q_{j-1}} \circ \cdots \circ T_{q_1} \circ T_{q_0}.$$

Définissons, pour $p \geq 2$ et $t \geq 1$

$$B_p(t) = \left[\frac{t-1}{p+t-1}, \frac{t}{t+p} \right[.$$

Posons alors

$$B(r) = B(r_0, \dots, r_{n-1}) = B_{q_0}(r_0) \cap C_0^{-1}\left(B_{q_1}(r_1)\right) \dots \cap C_{n-2}^{-1}\left(B_{q_n-1}(r_{n-1})\right).$$

Bien que ce développement ne soit pas contrôlé par un système fibré sur $[0,1[$, la définition de cylindres de rang "n" facilite l'étude de sa vitesse de convergence ; les cylindres de rang n pour (FC_k) sont les $B(r_0, \dots, r_{n-1})$ non vides. Posons, pour tout $i \in [0, n[$, $\Pi_i(r) = \prod_{0 \leq j < i} \left(\frac{r_j}{r_j + q_j} \right)$, où $q_j = k^{r_0 \cdots r_{i-1}}$. Alors

$$B(r) = B(r_0, \dots, r_{n-1}) = \left[\Pi_{n-1}(r) \cdot \left(\frac{r_{n-1} - 1}{r_{n-1} + q_{n-1} - 1} \right),\ \Pi_n(r) \right[.$$

Une suite d'entiers positifs $r = (r_i)_{i \geq 0}$ est une suite de digits admissible pour (FC_k) si et seulement si il existe $x \in [0,1[$ tel que $r(x) = r$. Alors r est admissible pour (FC_k) si et seulement si pout tout $i \geq 0$, $B(r_0, \dots, r_i) \cap B(r_0, \dots, r_{i+1}) \neq \emptyset$, i.e pour tout $i \geq 0$,

$$r_{i+1} > (r_i - 1)(r_i + q_i)(q_i)^{(r_i - 1)}.$$

Nous en déduisons que

$$|x - \Pi_i(x)| < \frac{q_i(x)}{\big(r_i(x) + q_i(x)\big)\big(r_i(x) + q_i(x) - 1\big)},$$

ce qui illustre la vitesse de convergence de (FC_k).

Modifions à présent (FC_k) en un nouvel algorithme (L) défini comme suit en $x \in]0,1[$;

(L). **1$^{\text{ère}}$ étape.** Soit $k(x) \geq 2$ un entier défini par

$$k(x) = \min\{\ k' \geq 2,\ x > \frac{1}{k'+1}\ \}.$$

2$^{\text{ème}}$ étape. Appliquons $\left(FC_{k(x)}\right)$ à x et soit $s(x)$ la suite de digites résultante.

La convergence de (L) sur $]0,1[$ découle de celle de (FC_k). Sa vitesse de convergence sur $]0,1[$ est uniforme ; si $x \in]0,1[$,

$$\begin{cases} s_1(x) & \geq & 1 + (2-1)(2+2)2^{2-1} = 9, \\ s_2(x) & \geq & 1 + (9-1)(9+2^2)2^{2(9-1)} = 6815745, \\ s_3(x) & \geq & 1 + (681745 - 1)(681745 + 2^{18})2^{18.681744} > 10^{12}.2^{10^8} \dots . \end{cases}$$

II.5. Produits de Cantor généralisés fibrés

Dans le paragraphe précédent, nous avons présenté les algorithmes appelés (FC_k) et qui sont des cas particuliers de ceux définis dans [Opp].

Certains de ceux-ci sont contrôlés par des systèmes fibrés sur $[0,1[$. Aucune étude métrique n'ayant été réalisée à ce jour pour de tels systèmes, c'est sur les encouragements du Professeur F. Schweiger, créateur de la Théorie des Systèmes fibrés en Théorie des Nombres, que nous avons entrepris de combler cette lacune.

D'abord présentons les produits de Cantor généralisés fibrés, où lorsque "k" est entier, nous retrouvons des produits définis par [Opp] ou [Sie].

Soit k un nombre réel ≥ 1. Soit $x \in [0,1[$. Considérons l'algorithme suivant ;

1$^{\text{ère}}$ étape. Soit $r_0(x)$ le seul entier ≥ 1 tel que $\dfrac{r-1}{r+k-1} \leq x < \dfrac{r}{r+k}$.

Posons $\Pi_0(x) = \dfrac{r_0(x)}{r_0(x)+k}$.

2$^{\text{ème}}$ étape. Définissons $r_{i+1}(x) = r_0(\Pi_i^{-1}(x).x)$,

et posons $\Pi_{i+1}(x) = \Pi_i(x).\left(\dfrac{r_{i+1}(x)}{r_{i+1}(x)+k}\right)$.

Cet algorithme est contrôlé par la transformation fibrée suivante ;

$$\begin{array}{rccc} T: & [0,1[& \longrightarrow & [0,1[\\ & x & \longmapsto & x.\left(\dfrac{r_0(x)+k}{r_0(x)}\right) \end{array}$$

Nous étudions dans [Lac], pour les valeurs entières de k, la transformation T du point de vue métrique sur $[0,1[$; nous donnons toutes les mesures de probabilité boréliennes $T-$invariantes (il n'y en a qu'une, la mesure de Dirac en 0), toutes les solutions de l'équation de Kuzmin associée à la transformation T qui est non-singulière relativement à la mesure de Lebesgue λ. Nous montrons que celles qui sont densité de mesures $\sigma-$finies, équivalentes à la mesure de Lebesgue λ, sont densité de mesures non-ergodiques. Ce dernier point utilise des techniques proches de celles utilisées dans l'étude de l'ergodicité des séries de Sylvester (voir [Sch]). Finalement, nous montrons une $\lambda-$p.p. complète uniforme distribution pour la répartition barycentrique des itérés d'un point dans l'image des cylindres de rang 1 qu'il visite successivement

.../...

Metric properties of generalized Cantor products

by

Y. Lacroix[(1)]

Abstract. *Finite and absolutely continuous invariant measures for fibered generalized Cantor products (in the sense of Sierpinski) are described. Lebesgue complete uniform distribution is proved for sequences associated in a natural way to these.*

0.– Introduction.

Generalized Cantor products are algorithms that give a representation of real numbers $x \in [0,1[$ as infinit products of rationnal ones. They have been developped in [Opp] first. Let us present those we shall consider from the metric point of view in this paper.

The letter "k" shall denote an integer ≥ 1. For any $x \in [0,1[$, let $r_0(x) \in \mathbf{N}$ and $T(x) \in [0,1[$ be defined by

$$\frac{r_0(x)-1}{r_0(x)+k-1} \leq x < \frac{r_0(x)}{r_0(x)+k}, \quad T(x) := x.\left(\frac{r_0(x)+k}{r_0(x)}\right). \tag{1}$$

One can see that $r_0(x) = \left[\frac{kx}{1-x}\right] + 1$. Define, for any real number $z \geq 1$,

$$\begin{cases} a_z &= (z-1) \,/\, (z+k-1), \\ b_z &= a_z \,/\, a_{z+1} = a_{(z-1)(z+k)+1} \\ J_z &= [a_z,\ a_{z+1}[. \end{cases} \tag{2}$$

In the sequel, the letter "n" shall always denote an integer. The sequences $(a_n)_{n\geq 1}$ and $(b_n)_{n\geq 1}$ are strictly increasing from 0 to 1. By definitions we have $\bigcup_{n\geq 1} J_n = [0,1[$, $J_n \cap J_m = \emptyset$ if $n \neq m$ and $T(x) = x.a_{n+1}^{-1}$ on J_n. Moreover

$$T\big(J_n\big) = \big[b_n,\ 1\big[.$$

(1) Université de Provence, UFR-MIM, Case 92, 3 place V.Hugo, 13331 Marseille Cedex 3, France. Research partially supported under DRET contract 901636/A000/DRET/DS/SR.

Thus, according to the terminology of F. Schweiger (see [Sch]), the triple $(T, [0,1[, (J_n)_{n\geq 1})$ is a measurable fibered system on $[0,1[$ with the Borel $\sigma-$algebra B.

Graphe of T for $k = 2$.

Given $k \geq 1$ and $x \in [0,1[$, we define the sequence $\big(r_t(x)\big)_{t\geq 0}$ as follows :

$$r_t(x) = r_0(T^{(t)}(x)), \tag{3}$$

where $T^{(t)}$ denotes the t-th iterate of T $(T^{(0)} = Id_{[0,1[})$.

W. Sierpinski ([Sie-1]) and A. Oppenheim ([Opp]) showed that for any integer $k \geq 1$ and any $x \in [0,1[$,

$$x = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{r_i(x)}{r_i(x) + k} \ . \tag{4}$$

The case $k = 1$ corresponds to the Cantor's product (see [Per]). In [Kn-Kn], generalizations of the Cantor's product that are given do not overlap with those from [Sie-1] or [Opp], and are not arising from fibered systems on $[0,1[$.

Euler's formula (see [MeFr-VdPo]) and Escott's formula ([Esc], [Sie-2])

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \prod_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\varphi^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)+1}\right), \quad \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = \prod_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\gamma^{(n)}(x-1)}{\gamma^{(n)}(x-1)+2}\right),$$

where $\varphi(x) = 2x^2 - 1$ and $\gamma(z) = z^3 + 3z^2 - 2$, both give product expansions for integer x (with $k = 1$ or $k = 2$). Some other formulas can be derived from the work of Ostrowski [Ost] (see also [MeFr-VdPo]). P. Stambul ([Sta]) points out to us the following Cantor product expansion

$$\sqrt{2} - 1 = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\varphi^{(n)}(1)}{\varphi^{(n)}(1) + 1} \right),$$

where $\varphi(x) = 4x^2 - 1 + 2x\sqrt{2x^2 - 1}$ is not a polynomial.

The paper is organized as follows. In Part I we give some preliminary notations for cylinder sets and describe admissible sequences of digits $r_n(x)$ which occur in the product formula (4). In Part II, we identify $[0, 1[$ to the torus $\mathbf{X} := \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ and then define T on $\mathbf{X}$. We show that T has only one $T-$invariant Borel probability measure on $\mathbf{X}$, namely the Dirac measure at $\overline{0}$. Part III studies $\sigma-$finite measures which are absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure λ and are $T-$invariant. This is done by solving the classical Kuzmin's equation. The fibered system arising from Sylvester's expansion is known to be non ergodic for any $T-$invariant, $\lambda-$equivalent, $\sigma-$finite Borel probability (see [Sch]). Analoguous result is proved for T in Part IV. Therefore, from the ergodic point of view, these systems are "highly dissipative". In Part V we define the sequence $\big(t_n(x)\big)_{n\geq 0}$ as

$$t_n(x) = \frac{T^{(n+1)}(x) - b_{r_n(x)}}{1 - b_{r_n(x)}}.$$

We prove that the sequence of random variables $\big(t_n(.)\big)_{n\geq 0}$ is uniformly and identically distributed. Moreover, for any $p \in \mathbf{N}$, for almost every $x \in [0, 1[$, the sequence $(t_n(x), \ldots, t_{n+p}(x))_{n\geq 0}$ is uniformly distributed in $[0, 1]^{p+1}$. Thus, Lebesgue a.e, the sequence $(t_n(x))_{n\geq 0}$ is completely uniformly distributed in $[0, 1]$ (see [Ku-Ni]).

The author would like to express his thanks to Professors J.P. Allouche, P. Liardet, F. Schweiger and B. Host for valuable discussions and usefull remarks.

I.– *Admissible sequences of digits*

From [Sie-1] and the definition of T one has

$$x = \prod_{i=0}^{+\infty} \frac{r_i(x)}{r_i(x)+k}, \quad T^{n+1}(x) \in [b_{r_n}, 1[. \tag{5}$$

with $T^n(x) \in [\frac{r_n-1}{r_n+k-1}, \frac{r_n}{r_n+k}[$ and $r_n = r_n(x)$. This shall be called the $T-$expansion of x.

Take 1 as the value of the empty product, and let $n \geq 0$. One has

$$\begin{aligned} 0 < \prod_{j=0}^{n} \frac{r_j(x)}{r_j(x)+k} - x &< \Big(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{r_j(x)}{r_j(x)+k}\Big)\Big(\frac{r_n(x)}{r_n(x)+k} - \frac{r_n(x)-1}{r_n(x)+k}\Big) \\ &< \frac{k}{(r_n(x)+k)(r_n(x)+k-1)}. \end{aligned}$$

Let n be an integer ≥ 1 and let $r := (r_0, \ldots,\ r_{n-1}) \in \mathbf{N}^{*n}$. The set

$$B(r) := J_{r_0} \cap T^{-1}\big(J_{r_1}\big) \cap \cdots \cap T^{-n+1}\big(J_{r_{n-1}}\big)\ .$$

is said to be a cylinder set of rank n if it is not empty. For $r = (r_0, \ldots, r_{n-1}) \in \mathbf{N}^n$ (respectively $p = (p_i)_{i\geq 0}$) and $j \in [0, n]$ (resp. $j \geq 0$), define

$$\mathbf{\Pi}_j(r) := \prod_{i=0}^{j-1} \frac{r_i}{r_i+k} \quad \left(\text{resp. } \mathbf{\Pi}_j(p) := \prod_{i=0}^{j-1} \frac{p_i}{p_i+k}\right). \tag{6}$$

If $B(r)$ is a cylinder set of rank n we easily get from (1), (2) and (5) :

$$B(r) = \big[\Pi_n(r).b_{r_{n-1}},\ \Pi_n(r)\big[\ . \tag{7}$$

Definition 1.1. *An $n-$uple $r = (r_0, \ldots, r_{n-1})$ (resp. a sequence $p = (p_m)_{m\geq 0} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$) is said to be a $T-$admissible $n-$uple (resp. sequence) of digits if $B(r) \neq \emptyset$ (resp. $B(p_0, \ldots, p_{n-1}) \neq \emptyset$ for all $n \geq 1$). The set of $T-$admissible $n-$uples will be denoted by A_n.*

From (5), p is a $T-$admissible sequence of digits if and only if for all $n \geq 0$, one has

$$[b_{p_n}, 1[\cap J_{p_{n+1}} \neq \emptyset.$$

Proposition 1.1. *A sequence $p = (p_n)_{n\geq 0}$ of natural numbers is a $T-$admissible sequence of digits if and only if for all $n \geq 0$ one has :*

$$p_{n+1} \geq p_n^2 + (p_n - 1)(k-1) \geq p_n^2.$$

Proof. Since b_r has the form $a_{(r-1)(r+k)+1}$, an admissible sequence $(p_n)_{n\geq 0}$ is characterized by the inequalities $b_{p_n} < a_{p_{n+1}+1}$, $n \geq 0$. In other words,

$$\frac{(p_n - 1)(p_n + k)}{(p_n - 1)(p_n + k) + k} < \frac{p_{n+1}}{p_{n+1} + k}.$$

After simplification, we get the desired inequality. ∎

Remark 1.1. Let $p(.)$ be the polynomial $p(x) := x^2 + (x-1)(k-1)$. From (2) we have $a_n = a_{n+1}a_{p(n)} = a_{n+1}a_{p(n)+1}a_{p^2(n)}$. Hence by induction we obtain the following product formula

(8) $$\frac{n-1}{n-1+k} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{p^{(j)}(n)}{p^{(j)}(n) + k}.$$

According to Proposition 1.1,, formula (8) gives the $T-$expansion of $\frac{n-1}{n-1+k}$, for $n \in \mathbf{N}$ (this was known from [Opp]). However formula (8) holds for all real numbers $k \geq 1$ and $n \geq 1$.

II.– Finite invariant measures

The map T can be viewed as a transformation on the one dimensional torus $\mathbf{X} := \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Indeed, if $\overline{x}$ denotes the class of $x \in \mathbf{R}$ modulo 1, we put

$$T(\overline{x}) = \overline{T(x)}.$$

The set of $T-$invariant Borel probability measures on $\mathbf{X}$ is in a one to one correspondance with the corresponding one for T on $[0,1[$. The set D of discontinuous points of T in $\mathbf{X}$ or in $[0,1[$ is

$$D := \{\overline{a_n}\,;\, n > 1\},$$

but T is continuous at $\overline{0}$.

Proposition 2.1. *The transformation T on $\mathbf{X}$ has only one $T-$invariant Borel probability measure, namely the Dirac measure at $\overline{0}$.*

Proof. Let $f : \mathbf{X} \to \mathbf{C}$ be a continuous map and let μ be a $T-$invariant borel probability measure on $\mathbf{X}$. It is easy to see that the sequence $(f(T^p(\overline{x}))_{p\geq 0}$ tends to $f(\overline{0})$. But from the individual ergodic theorem, the sequence of means $\frac{1}{n}\sum_{0\leq p<n} f(T^p(\overline{x}))$ converges $\mu-$a.e. From the dominated convergence theorem of Lebesgue we obtain after integration $f(\overline{0}) = \int_{\mathbf{X}} f d\mu$. ∎

Remark 2.1. It is more interesting to consider probability measures μ which are quasi-invariant under T, that is to say μ is equivalent to $\mu{\circ}T^{-1}$. We give an example of such a measure which is discrete. Let β_j, $j \in \mathbf{Z}$ be the points in [0,1[(identified to $\mathbf{X}$) given by

$$\beta_n := \frac{p^{(n)}(2)-1}{p^{(n)}(2)-1+k} \quad \text{and} \quad \beta_{-n} = (k+1)^{-n-1}$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$. By (5) and (8) one has

$$T^n(\frac{1}{k+1}) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{p^{(j)}(p^{(n)}(2))}{p^{(j)}(p^{(n)}(2))+k}$$

for $n \geq 0$ and $T((k+1)^{-(m+1)}) = (k+1)^{-m}$ for $m \geq 1$. Hence $T(\beta_n) = \beta_{n+1}$ for all $n \in \mathbf{Z}$. Let δ_a denote the Dirac measure at a then $\delta_{b_n}{\circ}T^{-1} = \delta_{b_{n+1}}$. This proves that the probability measure $\mu := \dfrac{1}{3}\sum_{n\in\mathbf{Z}} 2^{-|n|}\delta_{\beta_n}$ is quasi-invariant under T.

III.– The Kuzmin's equation.

In this section we are interested in the construction of $\sigma-$finite measures on [0,1[, $T-$invariant and absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure λ. First we need the following Lemma :

Lemma 3.1. *The transformation T is non singular with respect to λ.*

Proof. This follows from the fact that for any $x \in [0, 1[$,

$$x \leq T(x) \leq (k+1).x. \ \blacksquare$$

Since T is non singular, we can introduce the Frobenius-Perron operator A of T. For any $\lambda-$measurable map $f : [0,1[\to \mathbf{R}$, one has from the definition of A,

$$A(f)(x) = \sum_{n\geq 1} f\big(T_n^{-1}(x)\big)\big|T'\big(T_n^{-1}(x)\big)\big|^{-1}\cdot\mathbf{1}_{T(J_n)}(x),\ \lambda-\text{a.e},$$

where $T_n^{-1} : T\big(J_n\big) \to J_n$ is the local inverse of T on $J_n = [a_n, a_{n+1}[$, $T'(y)$ is the derivative of T at $y \in J_n$, and $1_{T(J_n)}$ is the characteristic function of the interval $T(J_n)(= [b_n, 1[)$. Let h be a non negative $\lambda-$measurable map on [0,1[and define the measure $\mu_h(dx) := h(x)\lambda(dx)$. Assume that μ_h is $\sigma-$finite. Then μ_h is $T-$invariant if and only if h satisfies the Kuzmin's equation $A(h) = h$. Recall that $(b_n)_{n\geq 1}$ increases from 0 to 1 and $T_n^{-1} : [b_n, 1[\to J_n$ is given by $T_n^{-1}(x) = x\cdot a_{n+1}$. Hence the Kuzmin's equation reads as follows :

$$(K) \qquad h(x) = \sum_{n\geq 1} h(x.a_{n+1}).a_{n+1}.\mathbf{1}_{[b_n,\ 1[}(x), \quad \lambda-\text{a.e.}$$

Equation (K) gives in particular

$$(9) \qquad h(x)\mathbf{1}_{[b_n,b_{n+1}[}(x) = \left(\sum_{1\leq m\leq n} h(x\cdot a_{m+1})a_{m+1}\right)\mathbf{1}_{[b_n,b_{n+1}[}(x).$$

But for $x \in [b_n, b_{n+1}[$ one has $x\cdot a_{n+1} \in [a_n, a_{n+1}[$ and $b_n = a_{(n-1)(n+k)+1}$ so that $a_{n+1} < b_n$ if $n \geq 2$. This proves that if we know h on $[0, b_n[$ then (9) defines h on $[b_n, b_{n+1}[$. Since $[0, b_n[= \bigcup_{1\leq m<n}[b_m, b_{m+1}[$, we have proved :

Lemma 3.2. *There exists a one-to-one correspondance between solutions h of (K) on $[0,1[$ and solutions h' of (K) on $[0,\ b_2[$ given by $h' = h_{|_{W(2)}}$ (restriction).*

Now we study the solution h of (K) restricted to $[0, b_2[$ $(b_2 = \frac{k+2}{2(k+1)})$ *i.e,*

$$h\big(\frac{x}{k+1}\big) = (k+1)h(x), \quad x \in [0, b_2[.$$

Put

$$V(n) := \left[\frac{k+2}{2(k+1)^{n+1}},\ \frac{k+2}{2(k+1)^n}\right[,\ n \geq 1.$$

Then $T^{-1}\big(V(n)\big) = V(n+1)$ and for any $n, m \in \mathbf{N}$, if $n \neq m$, one has

$$T^{-n}\big(V(1)\big) \cap T^{-m}\big(V(1)\big) = \emptyset.$$

Thus, the set $V(1)$ is wandering for T and $\bigcup_{n\geq 1} V(n) =]0, b_2[$. Let φ_1 be a positive measurable function defined on $V(1)$. We construct inductively a sequence of positive measurable functions φ_n defined on $\bigcup_{1\leq p\leq n} V(p)$ by

$$\varphi_{n+1}(x) = \begin{cases} \varphi_n(x) \text{ if } x \in \bigcup\limits_{1\leq p\leq n} V(p), \\ (k+1).\varphi_n\big((k+1).x)\big) \text{ if } x \in V(n+1)\ . \end{cases}$$

Define $(\varphi_1)_\infty$ on $]0, b_2[$ by $(\varphi_1)_\infty(x) = \varphi_n(x)$ if $x \in V(n)$. Then the function $(\varphi_1)_\infty$ is measurable, satisfies (K) on $]0, b_2[$, and is uniquely determined by its values on $V(1)$. Thus, applying Lemma 3.2, we obtain all solutions of (K) :

Theorem 3.1. *There is a one-to-one correspondance between measurable solutions $h \geq 0$ of (K) on $[0, 1[$, and measurable functions $\varphi_1 \geq 0$ on $V(1)$ given by $h_{|]0,b_2[} = (\varphi_1)_\infty$.*

IV.– Non ergodicity of T

We consider $T-$invariant $\sigma-$finite measures μ absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure λ and put $h := \dfrac{d\mu}{d\lambda}$.

Theorem 4.1. *Let $\mu = h.\lambda$ be a $\sigma-$finite measure, equivalent to λ and $T-$invariant. Then μ is not ergodic for T.*

Proof. We need the following two Lemmas.

Lemma 4.1. *There are two positive constants d_1 and d_2 such that for any non empty cylinder set $B(r_0, \ldots, r_{n-1})$ of rank $n \geq 1$ and for any integers w, j, $(w \geq j \geq 1)$, such that $B(r_0, \ldots, r_{n-1}, j, w)$ is a non empty cylinder set of rank $n+2$ one has*

$$d_1 \cdot \frac{j^2}{w^2} \leq \frac{\lambda\big(B(r_0, \ldots, r_{n-1}, j, w)\big)}{\lambda\big(B(r_0, \ldots, r_{n-1}, j)\big)} \leq d_2 \cdot \frac{j^2}{w^2}\ .$$

Proof. Put $B = B(r_0, \ldots, r_{n-1}, j, w)$, $A = B(r_0, \ldots, r_{n-1}, j)$ and $P = \Pi_n(r)$ for short, where $r = (r_0, \ldots, r_{n-1})$ (cf. (6)). Then

$$\lambda(A) = P \cdot \frac{k}{(j+k)(j+k-1)}, \quad \text{and} \quad \lambda(B) = P \cdot \frac{jk}{(j+k)(w+k)(w+k-1)}.$$

Therefore,

$$\frac{\lambda(B)}{\lambda(A)} = \frac{j(j+k-1)}{(w+k)(w+k-1)},$$

and the inequalities of the Lemma follow with constant (for example) $d_1 = (k^2 + k)^{-1}$ and $d_2 = k$. ■

Lemma 4.2. *The limit $\beta(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{\log(r_n(x))}{2^n}$ exists $\lambda-$a.e. Moreover, $\beta(.)$ is measurable and there exists a contant $\gamma > 0$ such that for all $j \geq 1$, $n \geq 0$ and all $\varepsilon > 0$ one has*

$$\lambda(\{x;\ r_n(x) = j \text{ and } 0 \leq \beta(x) - 2^{-n}\log j \leq \varepsilon\}) \geq \Big(1 - \frac{2}{e^{\gamma\varepsilon 2^n} - 1}\Big)\lambda(\{r_n = j\}). \tag{10}$$

Proof. Let $\varepsilon > 0$ and for $x \in [0,1[$ define $\beta_n(x) := 2^{-n}\log(r_n(x))$. Since $r_{n+1}(x) \geq r_n(x)^2$, the sequence $\big(\beta_n(x)\big)_{n\geq 0}$ is not decreasing. Then $\beta_{n+1}(x) - \beta_n(x) > \varepsilon$ is equivalent to $r_{n+1}(x) > exp(\varepsilon.2^{n+1})r_n(x)^2$. From Lemma 4.1, we get

$$\lambda\{r_n = j \ \text{ and } \ \beta_{n+1} - \beta_n > \varepsilon\} \leq d_2\Big(\sum_{\substack{w, \\ w > j^2\exp(\varepsilon 2^{n+1})}} \frac{j^2}{w^2} \Big)\lambda\{r_n = j\}. \tag{11}$$

But it follows from elementary calculus that for all $j \geq 1$,

$$\sum_{\substack{w, \\ w > j^2\exp(\varepsilon 2^{n+1})}} \frac{j^2}{w^2} \leq \frac{2}{e^{\varepsilon 2^{n+1}}} \tag{12}$$

Using (11) we obtain

$$\lambda(\{r_n = j \ \text{ and } \ \beta_{n+1} - \beta_n > \varepsilon\}) \leq 2e^{-\varepsilon 2^{n+1}}\lambda(\{r_n = j\}).$$

Define $\eta_m = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2})^{-(m+1)}$, such that $\sum_{m\geq 1}\eta_m = 1$. Let $n \geq 0$, $m \geq 1$ be integers and assume $\beta_{n+s}(x) - \beta_{n+s-1}(x) \leq \varepsilon\eta_s$ for all $s \in \{1,2,\ldots,m\}$. Then $\beta_{n+m}(x) - \beta_n(x) \leq \varepsilon$ so that for

$$X_n(j;\varepsilon) := \{x;\ r_n(x) = j \ \text{ and } \ \exists\, m \geq 1,\ \beta_{n+m}(x) - \beta_n(x) > \varepsilon\}$$

we obtain

$$\begin{aligned}
\lambda(X_n(j;\varepsilon)) &\leq \lambda(\{r_n = j \ \text{ and } \ \exists m \geq 1,\ \beta_{n+m} - \beta_{n+m-1} > \varepsilon\eta_m\}) \\
&\leq 2\Big(\sum_{m\geq 1} e^{-\varepsilon\eta_m 2^{n+m+1}}\Big)\lambda(\{r_n = j\}) \\
&\leq \frac{2}{e^{\gamma\varepsilon 2^n} - 1}\lambda(\{r_n = j\}) \qquad (13)
\end{aligned}$$

where $\gamma = \sqrt{2} - 1$. But (13) is nothing that inequality (10) of Lemma 4.2. If we sum over j all inequalities (10) (n fixed) we also get

$$\lambda(\{\beta - \beta_n \leq \varepsilon\}) \geq 1 - \frac{2}{e^{\gamma\varepsilon 2^n} - 1}.$$

Now it is quite clear that the sequence $(\beta_n(x))_{n\geq 0}$ converges (in $[0,+\infty[$) for almost all $x \in [0,1[$. Since β_n is measurable, β also is. ■

Remark 4.1. Notice that β satisfies the following fonctional equations :

$$\beta(Tx) = 2\beta(x) \quad \text{and} \quad \beta\Big(\frac{1}{k+1}x\Big) = \frac{1}{2}\beta(x).$$

Moreover, as in the case of Sylvester's series (see [Go-Sm]), it can be proved that β is dense in its epigraph and has local minimas at rationnal points exactly. This follows from the fact that conditions for admissible sequences of digits for fibered generalized Cantor products and those for Sylvester's series have similar polynomial growth restrictions.

Proof of Theorem 4.1. Let J be a non empty open sub-interval of $]0,\infty[$. Choose $\varepsilon > 0$ such that there exist integers $p \geq 1$ and $m \geq 1$, satisfying

$$[\frac{\log(p)}{2^m} - \varepsilon, \frac{\log(p)}{2^m} + \varepsilon] \subset J.$$

Let N_ε be an integer such that $1 - \frac{2}{e^{\gamma\varepsilon 2^n}-1} > 0$ for all $n \geq N_\varepsilon$. We can easily choose integers $d \geq 2$ and $n \geq N_\varepsilon$ in order to have $2^{-n}\log d$ close enough to $2^{-m}\log p$ such that we still have

$$[\frac{\log(d)}{2^n} - \varepsilon, \frac{\log(d)}{2^n} + \varepsilon] \subset J.$$

Since $\lambda(\{r_n = d\}) > 0$ for any integer $d \geq 1$, inequality (10) implies $\lambda(\{x;\ \beta(x) \in J\}) > 0$ and the set

$$E(J) := \{x;\ \beta(x) \in \bigcup_{m\in\mathbf{Z}} 2^m J\}$$

is measurable and $T-$invariant with $\lambda(E(J)) > 0$. Let J and J' be two non empty open intervals such that $J \subset [\frac{1}{2},\frac{3}{4}[$ and $J' \subset [\frac{3}{4},1[$. Then the sets $E(J)$ and $E(J')$ are disjoint, $T-$invariant and

$$\mu(E(J)) > 0 \quad \text{and} \quad \mu(E(J')) > 0.$$

This ends the proof. ■

V.– Uniform distribution

In this section we study the distribution of $T^n(x)$ in the interval $[a_{r_n(x)}, a_{r_n(x)+1}[$. More precisely let $(t_n(.))_{n\geq 0}$ be the sequence of random variables defined on $[0,1[$ by

$$\begin{aligned} t_n(x) &:= \frac{T^n(x) - a_{r_n}}{a_{r_n+1} - a_{r_n}} \\ &= \frac{T^{n+1}(x) - b_{r_n(x)}}{1 - b_{r_n(x)}}, \quad x \in [0,1[, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Let $\Phi_n(.)$ denote the distribution function of $t_n(.)$, and define

$$W_n(d) := \{x;\ 0 \leq t_n(x) < d\}\ ,\ d \in [0,1].$$

Theorem 5.1. *The sequence of random variables $(t_n(.))_{n\geq 0}$ is identically and uniformly distributed (i.e., $\Phi_n(d) = d$ for $0 \leq d \leq 1,\ n \geq 0$).*

Proof. For $d \in [0,1]$ we have $\Phi_n(d) = \lambda(\{\ x;\ 0 \leq t_n(x) < d\ \})$. Let $r = (r_0, \ldots, r_n) \in A_{n+1}$ (see Definition 1.1). Since $T^{n+1}(x) = \Pi_{n+1}^{-1}(r).x$ on $B(r_0, \ldots, r_n)$ and $T^{n+1}(B(r)) = [b_{r_n}, 1[$, the set $W_n(d)$ is the union of the following pairwise disjoint sets

$$B(r) \cap W_n(d) = \{x;\ b_{r_n}\Pi_{n+1}(r) \leq x < \Pi_{n+1}(r)(b_{r_n} + d(1 - b_{r_n}))\}.$$

But $\lambda(B(r) \cap W_n(d)) = d\lambda(B(r))$ so

$$\lambda(W_n(d)) = \sum_{r \in A_{n+1}} d\lambda(B(r)) = d. \ \blacksquare$$

With in mind the study of the $\lambda-$a .e. complete uniform distribution of the sequence $\big(t_n(x)\big)_{n\geq 0}$, let us introduce the following ;

Definition 5.1. *Let $p \in \mathbf{N}$ and $(d_0, \ldots, d_p),\ (d'_0, \ldots, d'_p) \in [0,1]^{p+1}$. Then, for any $n \geq 0$, let $E_n(d_0, \ldots, d_p) = W_n(d_0) \cap \ldots \cap W_{n+p}(d_p)$. If $m \geq 1$, let*

$$(d_0, \ldots, d_p, 1^m, d'_0, \ldots, d'_p) = (d_0, \ldots, d_p, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m \text{ times}}, d'_0, \ldots, d'_p).$$

Let $d_{-1} = 1$ and $E_n(\emptyset) = [0,1]$.

With the above notations, we have ;

Theorem 5.2. *For any integer $p \geq 0$, for any integer $n \geq 1$, any integer $m \geq 0$, any $(d_0, \ldots, d_p, d'_0, \ldots, d'_p) \in [0,1]^{2(p+1)}$,*

$$(\alpha) \quad \left|\lambda\big(E_n(d_0, \ldots, d_p, 1^m, d'_0, \ldots, d'_p)\big) - d_0 \cdots d_p d'_0 \cdots d'_p\right| \leq 20(p+1)^2 k^2 (k+1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

and

$$(\beta) \qquad \left|\lambda\big(E_n(d_0, 1^m, d'_0)\big) - d_0 d'_0\right| \leq \frac{5}{2} k^2 (k+1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m}.$$

Proof : STEP 1. We need several lemmas and definitions ;

Lemma 5.1. *For any $n \in \mathbf{N}$, $m \geq 1$, $r = (r_0, r_1, \ldots, r_{n+m}) \in A_{n+m+1}$, one has*

$$\frac{r_n^2 \lambda(B(r_{n+1}, \ldots, r_{n+m}))}{k} \leq \frac{\lambda(B(r))}{\lambda(B(r_0, \ldots, r_n))} \leq (k+1) r_n^2 \lambda(B(r_{n+1}, \ldots, r_{n+m})) \tag{14}$$

$$\leq \frac{k(k+1)}{2^m}. \tag{15}$$

Moreover

$$\lambda(B(r_0, \ldots, r_n)) \leq \min\left\{2^{-(n+1)}, \frac{k}{(r_n + k)(r_n + k - 1)}\right\}. \tag{16}$$

Proof. Notice that

$$\lambda(B(r)) = \left(\frac{r_0}{r_0 + k} \cdots \frac{r_{n+m-1}}{r_{n+m-1} + k}\right) \frac{k}{(r_{n+m} + k)(r_{n+m} + k - 1)}$$

$$= \lambda(B(r_0, \ldots, r_n)) \frac{(r_n + k)(r_n + k - 1)}{k} \lambda(B(r_{n+1} \ldots r_{n+m}))$$

and then inequality (14) follows from $\frac{x^2}{k} \leq \frac{(x+k)(x+k-1)}{k} \leq (k+1)x^2$, for $x \geq 1$. On the other hand, put $p(x) = x^2 + (x-1)(k-1)$ and assume that $r_{s-1} = 1 (\neq r_s)$ for a digit with $0 < s \leq n$. Proposition 1.1 and (7) imply

$$\lambda(B(r_0, \ldots, r_n)) \leq (k+1)^{-s} \frac{k}{(p^{(n-s)}(r_s) + k - 1)(p^{(n-s)}(r_s) + k)}.$$

If $r_s = 1 = r_n$ the inequality (15) is evident. Otherwise $r_s \geq 2$ but $p^{(n-s)}(2) \geq 2^{2^{n-s}}$ therefore (16) is still true. It remains to prove (15). If $r_n = 1$, the inequality follows from (16), otherwise we have

$$\lambda(B(r_{n+1}, \dots, r_{n+m})) \leq k(p^{(m)}(r_n))^{-2} \leq k r_n^{-2^{m+1}} \leq k r_n^{-2} 2^{-m}. \blacksquare$$

Lemma 5.2. *For positive natural numbers n and m let*

$$F_n(m) = \#\{\, (r_0, \dots, r_{n-2}) \in \mathbf{N}^{n-1},\ (r_0, \dots, r_{n-2}, m) \in A_n \,\}.$$

Then $F_n(m) \leq m$.

Proof. We use induction on n. It is clear that $F_1(m) \leq m$. Now, let $n \geq 1$ be given and assume $F_n(m) \leq m$ for all $m \geq 1$. Proposition 1.1 implies that for any $(r_0, \dots, r_{n-1}, m) \in A_{n+1}$ one has $r_{n-1} \leq \sqrt{m}$. Therefore

$$F_{n+1}(m) \leq \sum_{1 \leq j \leq \sqrt{m}} j \leq m. \blacksquare$$

Lemma 5.3. *For any positive natural numbers n, m and for any map $s : A_n \to \mathbf{N}^m$ satisfying $((r_0, \dots, r_{n-1}), s(r_0, \dots, r_{n-1})) \in A_{n+m}$, one has*

$$\sum_{r \in A_n} \lambda(B(r, s(r))) \leq \frac{5k^3(k+1)^3}{2^{n+m}}$$

(we identify $\mathbf{N}^{n+m}$ with $\mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^m$).

Proof. We first study the case $m = 1$. If $n = 1$, first notice that for any application $s_1 : A_1 = \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ such that for any $r \in \mathbf{N}^*$, $(r, s_1(r)) \in A_2$, from (7) and Proposition 1.1,

$$\sum_{r \in \mathbf{N}^*} \lambda\big(B(r, s_1(r))\big) \leq \sum_{r \geq 1} \frac{kr}{(r+k)(s_1(r)+k)(s_1(r)+k-1)}$$

$$\leq \sum_{r \geq 1} \frac{kr}{(r+k)(r^2+(k-1)r+1)(r^2+(k-1)r)}.$$

But since $k \geq 1$,

$$\sum_{r \geq 1} \frac{k}{(r+k)(r^2+(k-1)r+1)(r+k-1)} \leq \sum_{r \geq 1} \frac{1}{(r+1)(r^2+1)} \leq \frac{1}{2},$$

and indeed $2 \leq 5k^3(k+1)^3$.

Assume now that $n \geq 2$. Then from Lemma 5.1, it follows that for any $r \in A_n$, $r = (r_0, \ldots, r_{n-1})$,

$$\lambda\big(B(r, s(r))\big) \leq k(k+1)\lambda(B(r))\frac{r_{n-1}^2}{p(r_{n-1})^2} \leq k(k+1)\frac{\lambda\big(B(r)\big)}{r_{n-1}^2} \leq \frac{k^2(k+1)}{r_{n-1}^4}.$$

Then, for any $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{r\in A_n} \lambda\big(B(r, s(r))\big) &\leq k^2(k+1) \sum_{\substack{r\in A_n,\\ r_{n-1}>N}} \frac{1}{r_{n-1}^4} + \sum_{\substack{r\in A_n,\\ r_{n-1}\leq N}} \lambda\big(B(r, s(r))\big) \\ &\leq k^2(k+1)\sum_{t>N}\frac{1}{t^3} + k(k+1) \sum_{\substack{r\in A_n,\\ r_{n-1}\leq N}} \frac{\lambda(B(r))}{r_{n-1}^2} \\ &\leq \frac{k^2(k+1)}{2N^2} + k^2(k+1)^2 \sum_{\substack{(r_0,\ldots,r_{n-1})\in A_n,\\ r_{n-1}\leq N}} \lambda(B(r_0, \ldots, r_{n-2}))\frac{r_{n-2}^2}{r_{n-1}^4}.\end{aligned}$$

But $r_{n-1} \geq r_{n-2}^2$ therefore with $g = 4k^2(k+1)^2$ and (16),

$$\begin{aligned}\sum_{r\in A_n} \lambda(B(r, s(r)) &\leq \frac{k^2(k+1)}{2N^2} + \frac{g}{2^{n+1}} \sum_{\substack{(r_0,\ldots,r_{n-2})\in A_{n-1},\\ r_{n-2}\leq\sqrt{N}}} r_{n-2}^{-6} \\ &\leq \frac{k^2(k+1)}{2N^2} + \frac{g}{2^{n+1}} \sum_{1\leq k\leq\sqrt{N}} k^{-5}\end{aligned}$$

Passing to the limit as N tends to infinity, we get the case $m = 1$ with $\frac{5}{4}g$. The general case follows from (15) which gives $\lambda\left(B(r, s(r))\right) \leq \lambda\left(B(r, s_1(r))\right) \dfrac{k(k+1)}{2^{m-1}}$. ■

Definition 5.2. *Let $n \geq 1$ be an integer. Let $r = (r_0, \ldots, r_{n-1}) \in A_n$. Let $d \in [0, 1[$. Then define $r'(d, r)$ to be the unique integer such that, if $r'' = \big(r_0, \ldots, r_{n-1}, r'(d, r)\big)$, we have*

$$\Pi_n(r).\big(b_{r_{n-1}} + d(1 - b_{r_{n-1}})\big) \in B(r'').$$

Denote the above admissible $(n + 1)-$uple r'' by $rr'(d, r)$ (as a concatenation). If $(r, r') \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^m$, let rr' be the $(n+m)-$uple defined by $rr' = (r_0, \ldots, r_{n-1}, r'_0, \ldots, r'_{m-1})$. Endow the sets A_n with the lexicographic order. If $d = 1$, and $r \in A_n$, let $r'(1, r) = +\infty$, and $B(r + \infty) = \emptyset$.

Let $n \geq 0$ and $m \geq 1$. Let $r \in A_{n+1}$, $r = (r_0, \ldots, r_n)$, and define

$$A_{n+1,m}(r) := \{ \ r' = (r'_{n+1}, \dots, r'_{n+m}) \in \mathbf{N}^m, \ rr' \in A_{n+m+1} \ \}.$$

Lemma 5.4. *For any $q \geq 1$, and any $k \geq 1$,*

$$\frac{1}{(q+k).(q+k-1)} >$$

$$2\left(\sum_{m \geq 0} \frac{1}{(q+m+k)\big((q+m)^2 + (q+m)(k-1) + 1\big)(q+m+k-1)} \right).$$

Proof. The sum of the series is clearly bounded by

$$\frac{1}{(q+k)(q+k-1)(q^2+q(k-1)+1)} +$$

$$\left(\sum_{t \geq q+1} \frac{1}{(t+k)(t+k-1)} \right) \frac{1}{(q+1)^2 + (q+1)(k-1) + 1}$$

$$\leq \frac{1}{(q+k)(q+k-1)} \left(\frac{1}{(q+1)(q+k) - 2q - k + 1} + \frac{1}{q+1} - \frac{1}{(q+1)(q+k)} \right)$$

$$\leq \left(\frac{1}{q+1} \right) \frac{1}{(q+k)(q+k-1)},$$

and $q \geq 1$. ■

STEP 2. Proof of Theorem 5.2. Let $p' \geq 1$. Using refining partitions of cylinders on $[0,1[$, one can see quite easily, with the use of Theorem 5.1. and Definition 5.2., that, given $(d_0, \dots, d_{p'}) \in [0,1]^{p'+1}$, $n \geq 1$ and $r = (r_0, \dots, r_n) \in A_{n+1}$,

(17) $\lambda\big(E_n(d_0, \dots, d_{p'}) \cap B(r)\big) =$

$$\sum_{\substack{r_{n+1} \in A_{n+1,1}(r), \\ r_{n+1} < r'(d_0, r)}} \Bigg(\sum_{\substack{r_{n+2} \in A_{n+2,1}(rr_{n+1}), \\ r_{n+2} < r'(d_1, rr_{n+1})}} \cdots \Bigg(\sum_{\substack{r_{n+p'} \in A_{n+p',1}(rr_{n+1} \cdots r_{n+p'-1}), \\ r_{n+p'} < r'(d_{p'-1}, rr_{n+1} \cdots r_{n+p'-1})}} d_{p'}.\lambda\Big(B(rr_{n+1} \dots r_{n+p'})\Big)\Bigg)\Bigg)$$

$$+ \sum_{\substack{r_{n+1} \in A_{n+1,1}(r), \\ r_{n+1} < r'(d_0, r)}} \Bigg(\cdots \Bigg(\sum_{\substack{r_{n+p'-1} \in A_{n+p'-1,1}(r..r_{n+p'-2}), \\ r_{n+p'-1} < r'(d_{p'-2}, r..r_{n+p'-2})}} \lambda\Big(B\Big(r..r_{n+p'-1} r'(d_{p'-1}, r..r_{n+p'-1})\Big) \cap E_n(d_0, .., d_{p'})\Big)\Bigg)\Bigg)$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ \sum_{\substack{r_{n+1} \in A_{n+1,1}(r), \\ r_{n+1} < r'(d_0, r)}} \lambda\Big(B\Big(rr_{n+1} r'(d_1, rr_{n+1})\Big) \cap E_n(d_0, \dots, d_{p'})\Big)$$

$$+ \lambda\Big(B\Big(rr'(d_0, r)\Big) \cap E_n(d_0, \dots, d_{p'})\Big).$$

Let, for $i \in [1,p]$,

(18) $$X_i(d_0,\ldots,d_p,n) = \left|\lambda\left(E_n(d_0,\ldots,d_i)\right) - d_i\lambda\left(E_n(d_0,\ldots,d_{i-1})\right)\right|.$$

Notice that $X_i(d_0,\ldots,d_p,n) = 0$ if $p=0$ or $d_i \in \{0,1\}$. Let, for $i \in [1,p]$,

(19) $$Y_i(d_0,\ldots,d_p,n) =$$

$$\sum_{r\in A_{n+1}} \Bigg(\cdots\Bigg(\sum_{\substack{r_{n+i}\in A_{n+i,1}(rr_{n+1}\ldots r_{n+i-1}),\\ r_{n+i}<r'(d_{i-1},rr_{n+1}\ldots r_{n+i-1})}} \lambda\Big(B\Big(rr_{n+1}\ldots r_{n+i}r'(d_i,r\ldots r_{n+i})\Big)\cap E_n(d_0,\ldots,d_p)\Big)\Bigg)\cdots\Bigg),$$

and

(19) – bis $$Y_0(d_0,\ldots,d_p,n) = \sum_{r\in A_{n+1}} \lambda\left(B\big(rr'(d_0,r)\big)\cap E_n(d_0,\ldots,d_p)\right).$$

Definition 5.3. *Let $r'(r)$ denote the smallest element of $A_{n,1}(r)$ for $r \in A_n$.*

Let, for $i \in \mathbf{N}^*$, with Definitions 5.2 and 5.3,

(20) $$R_i(n) = \sum_{r\in A_{n+1}} \Bigg(\cdots\Bigg(\sum_{r_{n+i}\in A_{n+i,1}(rr_{n+1}\ldots r_{n+i-1})} \lambda\Big(B\Big(rr_{n+1}\ldots r_{n+i}r'(r\ldots r_{n+i})\Big)\Big)\Bigg)\cdots\Bigg),$$

and

(20) – bis $$R_0(n) = \sum_{r\in A_{n+1}} \lambda\left(B\big(rr'(d_0,r)\big)\right).$$

Define, for $i \in [1,p]$,

(21) $$Z_i(d_0,\ldots,d_p,n) = \sum_{r\in A_{n+1}} \Bigg(\cdots\Bigg(\sum_{\substack{r_{n+i}\in A_{n+i,1}(rr_n\ldots r_{n+i-1}),\\ r_{n+i}<r'(d_{i-1},rr_n\ldots r_{n+i-1})}} \lambda\Big(B\Big(rr_n\ldots r_{n+i}r'(d_i,r\ldots r_{n+i})\Big)\Big)\Bigg)\cdots\Bigg),$$

and

(21) – bis $$Z_0(d_0,\ldots,d_p) = \sum_{r\in A_{n+1}} \lambda\left(B\big(rr'(d_0,r)\big)\right).$$

Observe that if $p > 0$,

$$(22)\quad \left| \sum_{r\in A_{n+1}} \Bigg(\sum_{\substack{r_{n+1}\in A_{n+1,1}(r),\\ r_{n+1}<r'(d_0,r)}} \Bigg(\cdots \sum_{\substack{r_{n+p}\in A_{n+p,1}(rr_{n+1}\cdots r_{n+p-1}),\\ r_{n+p}<r'(d_{p-1},rr_{n+1}\cdots r_{n+p-1})}} \lambda\Big(B(rr_{n+1}\dots r_{n+p})\Big)\Bigg)\Bigg) \right.$$

$$\left. -d_{p-1}\left(\sum_{r\in A_{n+1}} \Bigg(\sum_{\substack{r_{n+1}\in A_{n+1,1}(r),\\ r_{n+1}<r'(d_0,r)}} \Bigg(\cdots \sum_{\substack{r_{n+p-1}\in A_{n+p-1,1}(rr_{n+1}\cdots r_{n+p-2}),\\ r_{n+p}<r'(d_{p-2},rr_{n+1}\cdots r_{n+p-2})}} \lambda\Big(B(rr_{n+1}\dots r_{n+p-1})\Big)\Bigg)\Bigg)\right) \right|$$

$$\leq Z_{p-1}(d_0,\dots,d_p,n).$$

Then, from relations (17) to (22), if we put $Z_{-1}(d_0,n)=0$,

$$(23)\qquad |\lambda\left(E_n(d_0,\dots,d_p)\right) - d_p\lambda\left(E_n(d_0,\dots,d_{p-1})\right)|$$

$$\leq \delta_{p\neq 0}.\delta_{d_p\notin\{0,1\}}.\left(2\left(\sum_{i=0}^{p-1} Y_i(d_0,\dots,d_p,n)\right) + Z_{p-1}(d_0,\dots,d_p,n)\right)$$

$$\leq \underbrace{\delta_{p\neq 0}.\delta_{d_p\notin\{0,1\}}.\left(2\left(\sum_{i=0}^{p-1} R_i(n)\right) + Z_{p-1}(d_0,\dots,d_p,n)\right)}_{W(d_0,\dots,d_p,n)},$$

where if P is a proposition, $\delta_P=0$ if P is false, 1 otherwise. Let $(d_0,\dots,d_p,1^m,d_0',\dots,d_p') = (a_0,\dots,a_{2p+m+1})$. From (17), (18), Definition 5.2 and repeated application of the triangle inequality,

$$(24)\quad \left|\lambda\left(E_n(d_0,\dots,d_p,1^m,d_0',\dots,d_p')\right) - d_0\cdots d_p d_0'\cdots d_p'\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} X_i(d_0,\dots,d_p,n) + \sum_{i=p+m+1}^{2p+m+1} X_i(a_0,\dots,a_{2p+m+1},n).$$

From Proposition I.1, Definition 5.3, for any integer $m\geq 1$, for any $r\in A_m$,

$$\sum_{p\geq r'(r)} \lambda\Big(B\big(rpr'(rp)\big)\Big) \leq \sum_{p\geq r'(r)} \left(\prod_{i=0}^{m-1} \frac{r_i}{r_i+k}\right) \frac{kp}{(p+k)(p^2+(k-1)p+1)(p^2+(k-1)p)},$$

and from Lemma 5.4, with $q=r'(r)$, we deduce from the above inequality that

$$\sum_{p\geq r'(r)} \lambda\left(B\big(rpr'(rp)\big)\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)\lambda\left(B\big(rr'(r)\big)\right).$$

Then, from definitions (20), (20)–bis and the above,

$$R_i(n) \leq \left(\frac{1}{2}\right) R_{i-1}(n) \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^i R_0(n). \tag{25}$$

It follows from (20), (21), (23), (24), and (25), that

$$\begin{aligned} &\left|\lambda\left(E_n(d_0,\ldots,d_p,1^m,d'_0,\ldots,d'_p)\right) - d_0\cdots d_p d'_0\cdots d'_p\right| \\ &\qquad \leq \sum_{i=1}^{p} W(d_0,\ldots,d_i,n) + \sum_{i=p+m+1}^{2p+m+1} W(a_0,\ldots,a_i,n) \\ &\qquad \leq 4p(p+1)R_0(n) + 2(p+1)^2 R_{p+m+1}(n). \end{aligned} \tag{26}$$

From Lemma 5.3, we have

$$R_0(n) \leq \frac{5k^2(k+1)^2}{2^{n+1}}. \tag{27}$$

Thus, from (25), (26), (27), we obtain

$$\begin{aligned} &\left|\lambda\left(E_n(d_0,\ldots,d_p,1^m;d'_0,\ldots,d'_p)\right) - d_0\cdots d_p d'_0\cdots d'_p\right| \\ &\qquad \leq 10(p+1)k^2(k+1)^2 \left(\frac{p}{2^n} + (p+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{p+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+m}\right), \end{aligned} \tag{28}$$

hence

$$\begin{aligned} &\left|\lambda\left(E_n(d_0,\ldots,d_p,1^m;d'_0,\ldots,d'_p)\right) - d_0\cdots d_p d'_0\cdots d'_p\right| \\ &\qquad \leq 20(p+1)^2k^2(k+1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned} \tag{28 - bis}$$

Now formula (α) of Theorem 5.2 is given in (28) $-$ bis above, and (β) comes from (28) in the case $p = 0$. This ends the proof of Theorem 5.2. ■

Theorem 5.3. *For almost all x, the sequence $(t_n(x))_{n\geq 0}$ is completely uniformly distributed in $[0,1]$, e.g for almost all $x \in [0,1[$ and every $p \geq 0$, the sequence $(t_n(x),\ldots,t_{n+p}(x))_{n\geq 0}$ is uniformly distributed in $[0,1]^{p+1}$. More precisely, for all $\varepsilon > 0$ and all $(d_0,d_1,\ldots,d_p) \in [0,1]^{p+1}$, one has*

$$\frac{1}{N}\sum_{n<N} \mathbf{1}_{[0,d_0[\times\cdots\times[0,d_p[}\big(t_n(x),\ldots,t_{n+p}(x)\big) = d_0 d_1 \ldots d_p + \mathcal{O}\left(\frac{(\log N)^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}{\sqrt{N}}\right), \quad \lambda - \text{a.e.}$$

Proof of Theorem 5.3. It is a direct application of Theorem 5.2, (α) and Theorem 11.3 from [Sch]. Indeed, given $p \geq 0$ and $(d_0,\ldots,d_p) \in [0,1]^{p+1}$ from (α), one has, if we let $E_n := E_n(d_0,\ldots,d_p)$,

$$\lambda(E_n) = d_0 \ldots d_p + \mathcal{O}(\frac{1}{2^n}),$$

,where the constant in the $\mathcal{O}$ is bounded when $(d_0,\ldots,d_p)$ is fixed, and $E_n(d_0,\ldots,d_p) \cap E_{n+m+p+1}(d_0,\ldots,d_p) = E_n(d_0,\ldots,d_p,1^m,d_0,\ldots,d_p)$, for m large enough. Thus, we can find a convergent series of non negative numbers $(\gamma_k)_{k\geq 0}$ such that $\gamma_k = \mathcal{O}'(\frac{1}{2^k})$, and for any $n \geq 0$ and $t \geq 0$,

$$\lambda(E_n \cap E_{n+t}) \leq \lambda(E_n)\lambda(E_{n+t}) + (\lambda(E_n) + \lambda(E_{n+t}))\gamma_t + \lambda(E_{n+t})\gamma_n. \blacksquare$$

However, using only (β), we have ;

Corollary 5.1. *For $\lambda -$ a.e $x \in [0,1[$, the sequence $\big(t_n(x)\big)_{n\geq 0}$ is uniformly distributed in $[0,1]$ and for all $\varepsilon > 0$, $d \in [0,1]$, and $N \in \mathbf{N}^*$,*

$$A(N,x,d) := \#\{0 \leq n < N;\ 0 \leq t_n(x) < d\} = N.d + \mathcal{O}\left(\sqrt{N}\big(\log(N)\big)^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).$$

Proof. A straigthforward computation gives

$$\int_0^1 \left|\sum_{n=M+1}^{M+N} \big(\mathbf{1}_{[0,d[}(t_n(x)) - d\big)\right|^2 \lambda(dx) = \mathcal{O}(N),$$

and the corollary results from [Ga-Ko]. $\blacksquare$

References.

[Eng] : F. Engel, in :*Verhandlungen des 52stn Versammlung deutscher Philologen und Schulmanner*, Marburg (1913) 191.

[Esc] : E.B. Escott, *Rapid method for extracting square roots*, Amer.Math.Monthly, 44 (1947), 644-646.

[Ga-Ko] : I.S. Gál & J.F. Koksma, *Sur l'ordre de grandeur des fonctions mesurables*, C. R. Acad. Sci de Paris, 227 (1948), 1321-1323.

[Go-Sm] : Ch. Goldie & R.L. Smith, *On the denominators in Sylvester's series*, Proc. London. Math. Soc, (3), 54 (1987), 445-476.

[Kn-Kn] : A. Knopfmacher & J. Knopfmacher, *A new infinit product representation for real numbers*, Mh. Math, 104 (1987), 29-44.

[Ku-Ni] : L. Kuipers & H. Niederreiter, Uniform distribution of sequences, *Pure and Applied Mathematics, Wiley Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts, 1974.*

[MeFr-VdPo] : M. Mendès France & A.J. Van der Poorten, *From geometry to Euler identities*, Theoretical Computer Science 65 (1989), 213-220.

[Opp] : A. Oppenheim, *On the representation of real numbers by products of rational numbers*, Quart. J. Math. Oxford, Ser (2) (1953), 303-307.

[Per] : O. Perron, Irrazionalzahlen, *Chelsea Publishing Company New York, New York.*

[Pet] : K. Petersen, Ergodic Theory, *Cambridge University Press, Cmabridge Advanced Studies in Math 2.*

[Sch] : F. Schweiger, Ergodic properties of fibered systems, Draft Version, April 1989, *Institut für Math. der Universität Salzburg, A-5020 Salzburg.*

[Sie-1] : W. Sierpinski, *On certain expansions of real numbers into infinit fast converging products*, Prace Math 2 (1956) 131-138.

[Sie-2] : W. Sierinpski, *Généralisation d'une formule de E.B. Escott pour les racines carrées*, Bull. Sco. Roy. Sci. Liège, 22 (1953), 520-529.

[Sta] : P. Stambul, private communication, 440 chemin du Roucas Blanc, 13007 Marseille, France.

Conclusion.

Nous avons donné un critère d'isomorphisme pour les flots de Tœplitz et des invariants complets pour les suites de Morse généralisées.

Nous avons donné des procédés de construction effectifs des flots de Tœplitz strictement ergodiques, d'entropie topologique donnée et de facteur équicontinu maximal donné.

Nous avons étudié la disjonction topologique des flots de Tœplitz.

Nous avons débuté la théorie métrique pour les systèmes de numération en produit infini.

Actuellement, suite à des questions posées par P. Liardet au sujet de la localisation de la $\sigma-$algèbre de Pinsker d'un flot de Tœplitz strictement ergodique et d'entropie positive, F. Blanchard et Y. Lacroix travaillent à la localisation du facteur maximal d'entropie nulle d'un flot de Tœplitz "à permutations", tels que les défini J. Kwiatkowski.

Nous avons dans cette voie construit de façon générale le facteur maximal d'entropie nulle d'un flot topologique ; nous avons développé les propriétés élémentaires attenantes et quelques exemples (voir [Bl-La]).

Voici plusieurs points qui nous semblent intéressants ;

–il n'existe pas d'exemple de flot topologique d'entropie positive, minimal, admettant 2 mesures ergodiques de probabilité invariantes.

–il n'existe pas de localisation du spectre discret d'un flot de Tœplitz.

–tout flot de Tœplitz est-il topologiquement coalescent ? La solution est peut-être combinatoire, ou bien passe par l'étude du semi-groupe enveloppant d'Ellis (voir [Ell], [Aus]). S. Glasner, de l'Université de Tel-Aviv, peut montrer que le semi-groupe d'Ellis d'un flot de Tœplitz n'est pas métrisable.

–pour les produits de Cantor, exhiber des nombres réels $x \in [0,1]$ tels que la suite $\big(t_n(x)\big)_{n\geq 0}$ soit complètement Lebesgue uniformément distribuée dans $[0,1]$

...... etc ......

Bibliographie.

[Ad-Ko-McAn] : R.L. Adler, A.G. Konheim & M.H. MacAndrew, *Topological entropy*, Trans.A.M.S, 114 (1965), 309-319.

[Al-Li] : J.P. Allouche & P. Liardet, *Generalized Rudin-Shapiro sequences*, Acta Arithmetica, LX.1 (1991).

[Aus] : J. Auslander, Minimal flows and their extensions, *North-Holland, Mathematics Studies, 153.*

[Bel] : R.M. Belinskaya, *Entropy of a piecewise power skew product*, Izv. V.U.Z.M., 161, 18, 3 (1974), 12-17.

[Bl-La] : F. Blanchard & Y. Lacroix, *The maximal zero entropy factor of a flow*, soumis à Proc. A. M. S., 1992.

[Bul] : W. Bulatek, *Topological conjugacy of Morse flows over finite abelian groups*, Studia Math., XC (1988).

[Bu-Kw-1] : W. Bulatek & J. Kwiatkowski, *Strictly ergodic Tœplitz flows with positive entropy and trivial topological centralizers*, to appear in Studia Math.

[Bu-Kw-2] : W. Bulatek & J. Kwiatkowski, *The topological centralizer of Tœplitz flows and their* Z_2-*extensions*, Publ.Math, 34 (1) (1990), 45-65.

[Ch-Ka-MeFr-Ra] : G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France & G. Rauzy, *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull.S.M.F, 108 (1980), 401-419.

[Dow] : T. Downarowicz, *The Choquet simplex of invariant measures for minimal flows*, Israel Journal of Math., 74, no 2-3 (1991), 241-256.

[Do-Iw] : T. Downarowicz & A. Iwanik, *Quasi uniform convergence in compact dynamical systems*, Studia.Math., T. LXXXIX (1988), 11-25.

[Ell] : R. Ellis, *A semigroup associated with a transformation group*, Trans. A. M. S. 94 (1960), 272-281.

[El-Go] : R. Ellis & W.H. Gottschalk, *Homomorphisms of transformation groups*, Trans.A.M.S, 94 (1960), 258-271.

[Eng] : F. Engel, in :*Verhandlungen des 52stn Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner*, Marburg (1913) 191.

[Esc] : E.B. Escott, *Rapid method for extracting square roots*, Amer.Math.Monthly, 44 (1947), 644-646.

[Go-He] : W.H. Gottschalk & G.A. Hedlund, Topological Dynamics, *A.M.S Colloquium publications vol XXXVI.*

[Go-Sm] : Ch.M. Goldie & R.L. Smith, *On the denominators in Sylvester's series*, Proc.London Math Soc, (3) 54 (1987), 3, 445-476.

[Fin] : N.J. Fine, *Infinit products for k^{th} roots*, Amer.Math.Monthly 84 (1977), 629-630.

[Ga-Ko] : I.S. Gál & J.F. Koksma, *Sur l'ordre de grandeur des fonctions mesurables*, C. R. Acad. Sci de Paris, 227 (1948), 1321-1323.

[Gri] : C. Grillenberger, *Construction of strictly ergodic systems. I. Given entropy*, Z.W.V.G, 25 (1972-73), 323-334.

[He-Ro] : Hewitt & Ross, Abstract harmonic analysis, part I, *Mathematischen Wissenschaften, Band 115, 1963.*

[Ja-Ke] : K.Jacobs & M.Keane, *0-1 sequences of Tœplitz type*, Z.W.V.G, 13 (1969), 123-131.

[Kea] : M. Keane, *Generalized Morse sequences*, Z.W.V.G, vol 10 (1968), 335-353.

[Kn-Kn] : A. Knopfmacher & J. Knopfmacher, *A new infinit product representation for real numbers*, Mh.Math, 104 (1987), 29-44.

[Ku-Ni] : L. Kuipers & H. Niederreiter, Uniform distribution of sequences, *Pure and Applied Mathematics, Wiley Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts, 1974.*

[Kwi] : J. Kwiatkowski, *Isomorphism of regular Morse dynamical systems induced by arbitrary blocks*, Studia Math., LXXXIV (1986).

[Kw-La] : J. Kwiatkowski & Y. Lacroix, *A criterion for Tœplitz flows to be topologically isomorphic and applications*, à paraître dans Compo.Math, 1992.

[Lac] : Y. Lacroix, *Metric properties for Generalized Cantor products*, à soumettre à Acta Arithmetica, 1992.

[Lem] : M. Lemaǹczyk, *Tœplitz Z_2-extensions*, Annales I.H.P, vol 24 (1988), 1-43.

[Lot] : A.V. Lotockiî, *On a method for representing real numbers as infinit products*, Ivanov.Gos.Ped.Inst.Uc.Zap.Fiz. Mat.Fak. 1 (1941), 1, 27-35.

[Ma-Pa] : N.G. Markley & M.E. Paul, *Almost automorphic minimal sets without unique ergodicity*, Israel Journal of Math., 34 (1979), 259-272.

[Mar] : J.C. Martin, *The structure of generalized Morse minimal sets on n symbols*, Trans.AMS, 232 (1977), 343.

[MeFr-VdPo] : M. Mendès France & A.J. Van der Poorten, *From geometry to Euler identities*, Theoretical Computer Science 65 (1989) 213-220.

[Mor] : M. Morse, *Recurrent geodesics on a surface of negative curvature*, Trans.A.M.S., 22 (1921), 84-100.

[New] : D. Newton, *On canonical factors of ergodic dynamical systems*, J. London Math. Soc., 19 (1979), 2^{nd} series, 129-136.

[Opp] : A. Oppenheim, *On the representation of real numbers by products of rational numbers*, Quart.J.Math Oxford (2), 4 (1953), 303-307.

[Ost] : A.M. Ostrowski, *Über einige Verallgemeinerungen des Eulerschen Produktes....*, Verhandl.der naturforsch.Gesellsch.in Basel, Band 40 (1929).

[Oxt] : J.C. Oxtoby, *Ergodic sets*, Bull. A. M. S, 58 (1952), 116-136.

[Pau] : M.E. Paul, *Construction of almost automorphic minimal flows*, General Topology and Applications, 6 (1976), 45-56.

[Par] : W. Parry, Topics in ergodic theory, *Cambridge Tracts in Math., Cambridge University Press, 75.*

[Per] : O. Perron, Irationahlzahlen, *Chelsea Publishing Company New York, New York.*

[Pet] : K. Petersen, Ergodic Theory, Cambridge University Press, *Cambridge Advanced Studies in Math 2.*

[Roh] : V.A. Rohklin, *Selected topics from the metric theory of dynamical systems*, Translations of the AMS, Vol 49.

[Roj-1] : T. Rojek, *The classification problem in Tœplitz Z_2-extensions*, Compo.Math, 72 (3) (1989), 341-358.

[Roj-2] : T. Rojek, *On metric isomorphism of Morse dynamical systems*, Studia Math., LXXXIV (1986), 247-267.

[Rud] : W. Rudin, *Some theorems on Fourier coefficients*, Proc.A.M.S., 10 (1959), 855-859.

[Rudo] : D.J. Rudolph, Fundamentals of measurable dynamics, Oxford University Press, *Clarendon Press, Oxford, 1990.*

[Sch] : F. Schweiger, Ergodic properties of Fibered systems, Draft Version, April 1989, *Institut fur Math. der Universitat Salzburg, A-5020 Salzburg.*

[Sha] : H.S. Shapiro, *Extremal problems for polynomials and power series*, Thesis MIT, 1951.

[Sie-1] : W. Sierpinski, *On certain expansions of real numbers into infinit fast converging products*, Prace Math 2 (1956) 131-138.

[Sie-2] : W. Sierinpski, *G 'enéralisation d'une formule de E.B. Escott pour les racines carrées*, Bull. Sco. Roy. Sci. Liège, 22 (1953), 520-529.

[Sta] : P. Stambul, *Développement en produit infini de Cantor de certains nombres irrationnels quadratiques*, communication privée, 1991 (Université de Provence, C/*o* P.Liardet).

[Tho] : A. Thomas, *Sur le développement de Cantor polynomial pour certains irrationnels quadratiques*, communication privée, 1991, (Université de Provence C/*o* P.Liardet)

[Thu] : A. Thue, *Über die gegenseitige lage gleicher Teile gewisser Zeichenreichen Videnskabsselskabets Skrifter I*, Mat. nat. Kl., Christiana, 1906.

[Wal] : P. Walters, *Affine transformations and coalescence*, Math. Syst. Theory, 8 (1) (1974), 33-44.

[Wil] : S. Williams, *Toeplitz minimal flows which are not uniquely ergodic*, Z.W.V.G, 67, 95-107 (1984).

Résumé. Essentiellement, nous reproduisons deux articles soumis ;

–J. Kwiatkowski & Y. Lacroix, *A criterion for Tœplitz flows to be topologically isomorphic and applications*, où un critère d'isomorphisme topologique de flots de Tœplitz est donné ; une famille non dénombrable de flots de Tœplitz strictement ergodiques, d'entropie et de facteur équicontinu maximal arbitraires, dont deux éléments distincts sont non topologiquement isomorphes, est contruite. Un invariant topologique pour les suites de Morse généralisées points fixes de $(k, 2k)-$substitutions sur Z_2 est donné. La disjonction topologique des flots de Tœplitz est étudiée.

–Y. Lacroix, *Metric properties for generalized Cantor products*, où l'ergodicité et les mesures invariantes finies ou $\sigma-$finies sont étudiées pour les produits généralisés de Cantor fibrés, et où presque partout, une suite naturellement associée à ceux-ci est Lebesgue complètement uniformément distribuée dans $[0, 1]$.

Le fil d'Ariane de ces travaux est l'étude des flots de Tœplitz.

Abstract. Essentially, we reproduce two submitted papers ;

–J. Kwiatkowski & Y. Lacroix, *A criterion for Tœplitz flows to be topologically isomorphic and applications*, where a criterion for topological isomorphism of Toeplitz flows is given ; an uncountable family of pairwise topologically non-isomorphic strictly ergodic Toeplitz flows, having the same arbitrary entropy and maximal equicontinuous factor, any two distinct elements of which are not topologically isomorphic, is constructed. Topological disjointness for Tœplitz flows is studied. A topological invariant is given for generalized Morse sequences fixed points of $(k, 2k)-$substitutions over Z_2.

–Y. Lacroix, *Metric properties for generalized Cantor products*, where finite and absolutely continuous invariant measures, for fibered generalized Cantor products, are described, and Lebesgue complete uniform distribution is proved for sequences associated in a natural way to these.

The frame for this work is the study of Tœplitz flows.

Mots clefs (Keywords) : Flots de Tœplitz, suites de Morse, entropie topologique, produit de Cantor (Tœplitz flows, Morse sequences, topological entropy, Cantor product).

Classifications A. M. S. : 54H20, 34C35, 28D05, 28D20, 10A30, 10K05, 10K10.