Université de Bretagne Occidentale,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences et Techniques,
6 Avenue V. Le Gorgeu, B.P. 809,
F-29285 Brest Cedex

École doctorale de Mathématiques
d'Angers, Brest, Nantes et Rennes

Habilitation à diriger des recherches
Spécialité : Mathématiques

DOCUMENT DE SYNTHÈSE

Étude de quelques problèmes concernant les Systèmes Dynamiques Topologiques, les Systèmes Dynamiques Métriques, et la Bonne Répartition presque sûre

par
Yves Lacroix

Soutenue le 24 Novembre 1997 à 14h30 en Amphi F de la faculté des sciences de l'U.B.O., devant le jury composé de Messieurs

F. Blanchard .... *Directeur de Recherches, CNRS, Université de Provence, Luminy*
Examinateur
D. Boivin .... *Professeur, U.B.O.*
Examinateur
Y. Derriennic .... *Professeur, U.B.O.*
Examinateur
E. Glasner .... *Professeur, Tel-Aviv University*
Rapporteur
B. Host .... *Professeur, Université de Marne La Vallée*
Président et Rapporteur
E. Lesigne .... *Professeur, Université François Rabelais de Tours*
Examinateur
P. Liardet .... *Professeur, Université de Provence, Château Gombert*
Examinateur
B. Petit .... *Professeur, U.B.O.*
Examinateur
J.-P. Thouvenot .... *Directeur de Recherches, CNRS, Université de Paris VI, Jussieu*
Rapporteur

LISTE DES TRAVAUX

Cette liste contient tous les travaux publiés de l'auteur à la date de soumission du document de synthèse. Dans ce dernier, nous avons choisi de ne présenter que ceux qui sont à la fois postérieurs à la thèse [La0] et les plus aboutis.

Thèse:
(1)[**La0**] : Y. Lacroix, *Contribution à l'étude des suites de Toeplitz, et numération en produit infini*, Thèse nouveau régime de l'Université de Provence, Marseille, présentée le 31/01/1992, sous la Direction du Professeur P. Liardet.

Articles issus de la thèse :
(2)[**DoKwLa**]: T. Downarowicz, J. Kwiatkowski & Y. Lacroix, *A criterion for Toeplitz flows to be topologically isomorphic and applications*, Colloq. Math. Vol. 68 (1995), 219–228.

(3)[**La1**]: Y. Lacroix, *Metric properties of generalized Cantor products*, Acta. Arithmetica 63 (1993), 61-77.

Articles et preprint non présentés :
(4)[**HuLa**]: P. Hubert & Y. Lacroix, *Renormalisation of algorithms in the probabilistic sense*, Proceedings of the 2^{nd} International Conference in Honour of J. Kubilius, Analytic and Probabilistic methods in Number Theory, Palanga, Lituania (1997), New Trends in Probability and Statistics, **4**, Utrecht-Tokyo, A. Laurinčikas, E. Manstavičius & V. Stakėnas (Eds), pp. 401–412.

(5)[**La2**]: Y. Lacroix, *Remarks on the Delange-Coquet formula*, Anz. der Österreich. Akad. der Wissenschaften, math.-naturwiss. Klasse No. 130 (1993), 49-51.

(6)[**La4**]: Y. Lacroix, *Mixing and natural extensions*, Publications du Séminaire de Probabilités de l'IRMAR (1995).

Sont présentés pour l'habilitation :
(7)[**BlLa**]: F. Blanchard & Y. Lacroix, *Zero entropy factors of topological flows*, Proc. A.M.S., Vol. 119 (1993), 985-992.

(8)[**DoLa1**]: T. Downarowicz & Y. Lacroix, *A non-regular Toeplitz flow with preset pure point spectrum*, Studia Math., Vol. 120 (1996), 235–246.

(9)[**DoLa2**]: T. Downarowicz & Y. Lacroix, *Almost 1-1 extensions of Furstenberg-Weiss type and application to Toeplitz flows*, accepté à Studia Mathematica (1998).

(10)[**IwLa**]: A. Iwanik & Y. Lacroix, *Some constructions of strictly ergodic non-regular Toeplitz flows*, Studia Mathematica 110 (1994), 191-203.

(11)[**KwLa1**]: J. Kwiatkowski & Y. Lacroix, *Rank and weak closure theorem, II*, Preprint 1996, $\approx$ 40 pages.

(12)[**KwLa2**]: J. Kwiatkowski & Y. Lacroix, *Multiplicity, rank pairs*, Journal d'Analyse Mathématique, **71** (1997), 205–235.

(13)[**La3**]: Y. Lacroix, *On strong uniform distribution, II: the infinite dimensional case*, accepté à Acta Arithmetica (1998).

(14)[**LaTh**]: Y. Lacroix & A. Thomas, *Number systems and repartition*, Journal of Number Theory, Vol. 49 (1994), 308-318.

À Benjamin, Rachel, et Myriam
ainsi qu'à mes parents et grand-parents

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du jury de leur présence, ce qui suppose qu'ils aient eu à la fois la patience et le goût de lire mes travaux.

Je tiens aussi à saluer ces membres qui tous à un moment ou à un autre m'ont donné des indications ou des explications précieuses.

Je remercie aussi les membres de la commission des thèses et habilitations de l'E.D.M.O., simplement d'avoir permis le bon déroulement du long processus d'habilitation.

Je remercie aussi volontiers mes co-auteurs, avec qui j'ai passé de très bons moments, et ai pu largement augmenter le champ de mes connaissances scientifiques ou techniques.

Je remercie mes interlocuteurs occasionnels, qui m'ont aidé, bien volontiers. Je ne peux malheureusement pas les citer, car ils sont trop nombreux, ou je regretterais d'en oublier.

Je salue respectueusement mes formateurs, dont Monsieur Arnoux, et les enseignants de l'UFR MIM de Marseille.

Venu à Brest de Marseille, sans avoir jamais mis les pieds dans le finistère auparavant, j'ai trouvé au Département de Mathématiques de l'U.B.O. un accueil et des conditions de travail très favorables. J'en profite donc pour saluer mes collègues.

Parmis ceux-ci, je remercie tout particulièrement ceux qui m'ont encouragé à soutenir.

DOCUMENT DE SYNTHÈSE

§O : Introduction

Notre recherche a pour point de départ la thèse de l'auteur [La0], publiée dans [La1] et [DoKwLa]. Il y était question de *flots de Toeplitz*, étudiés *du point de vue topologique*, et des *aspects métriques de la numération en produit de Cantor généralisé.*

Nous avons depuis poursuivi nos recherches en dynamique topologique, en *théorie des nombres presque sûre*, mais l'avons aussi élargie aux champs de la *dynamique métrique*, et de la *théorie spectrale.*

La présentation de nos travaux se veut synthétique. Nous avons tenté de dégager les résultats clefs. Pour ces raisons nous n'avons pas présenté les travaux publiés dans [HuLa], [La2] et [La4], qui sont moins aboutis que les autres.

En bref, on trouve dans [La2] une généralisation de la formule de Delange concernant la somme des chiffres en base q; dans [HuLa] se trouve un formalisme généralisé de [LaTh]; et dans [La4] sont étudiées les extensions naturelles pour les actions de $\mathbb{N}^d$, et la version correspondante du critère de Halmos pour le mélange [CoFoSi].

Le présent document se scinde en six chapitres. Le **premier** regroupe un certain nombre de définitions et résultats classiques de la théorie des systèmes dynamiques, et qui seront utilisés au cours des cinq chapitres suivants.

Les systèmes dynamiques constituent le point commun aux travaux présentés; c'est aussi le cas pour [La2] et [La4].

Dans les différents (sous)-chapitres qui suivent on trouvera un renvoi aux propriétés utilisées et énoncées au premier chapitre. Le lecteur déjà averti de la théorie des systèmes dynamiques pourra omettre ce chapitre en première lecture.

Toutefois sa lecture étant relativement aisée, il y trouvera un aperçu des notations que nous utilisons par la suite, et pourra de ce fait faciliter sa compréhension de l'ensemble de ce document.

Le **second** chapitre présente les résultats de [BlLa], dont l'essentiel est la preuve de l'existence d'un *facteur maximal d'entropie nulle topologique*, encore appelé le *(facteur de) Pinsker topologique*, ce qui répond à une question naturelle restée sans réponse depuis l'apparition de l'entropie topologique [AdKoMA].

Théorème [BlLa]. *Étant donné un flot topologique (X,T), il existe un facteur topologique $\pi_0 : (X,T) \to (X_0,T)$ unique à isomorphisme prés, tel que l'entropie topologique de (X_0,T), $h_{top}(X_0,T)$, soit nulle, ayant la propriété de maximalité suivante : quel que soit le facteur $\pi_1 : (X,T) \to (X_1,T)$ tel que $h_{top}(X_1,T) = 0$, il existe un facteur $\pi_{0,1} : (X_0,T) \to (X_1,T)$ tel que*

$$\pi_1 = \pi_{0,1} \circ \pi_0.$$

Ce travail utilise de façon essentielle les constructions de [Bl1,2], et a été suivi très rapidement de [BlHoMaMaRu], [BlGlHo], [GlWe1,2,3,4], et [Gl] : nous présentons une sélection de certains résultats extraits de cette série d'articles.

Le **troisième** chapitre traite des *flots de Toeplitz.* Ce sont des *sous-shifts minimaux* qui sont les clôtures d'orbites des suites de Toeplitz. Les *suites de Toeplitz* sont les éléments *régulièrement quasi-périodiques non périodiques* du shift : cela signifie que toute valeur prise par une telle suite l'est, partant de la position selectionnée, périodiquement, mais que globalement, la suite n'est pas périodique.

Dans le premier sous-chapitre sont énoncées les caractérisations topologiques et métriques des flots de Toeplitz. Du point de vue topologique, *ce sont exactement les sous-shifts minimaux extensions quasi-automorphes des machines à additionner* [MaPa]. Nous obtenons dans [DoLa2] leur caractérisation métrique, qui révèle que la classe des flots de Toeplitz strictement ergodiques est vaste du point de vue de la mesure :

Théorème [DoLa2]. *Un flot mesuré (X,T,μ) est métriquement isomorphe à un flot de Toeplitz strictement ergodique si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{cases} (T1) & (X,T,\mu) \text{ est ergodique;} \\ (T2) & \text{son entropie métrique } h_\mu(X,T) \text{ est finie;} \\ (T3) & \text{il admet une infinité de valeurs propres racines de l'unité.} \end{cases}$$

Cette caractérisation métrique s'avére être un corollaire de la topologique énoncée plus haut, et du résultat suivant, que l'on peut qualifier de "Théorème de type Jewett-Krieger" [DeGrSi] :

Théorème [DoLa2]. *Soit $\phi : (X,T,\mu) \to (Z,T,\nu)$ un facteur entre deux flots mesurés ergodiques d'entropie finie et non périodiques.*

Alors il existe deux sous-shifts strictement ergodiques (X_1,S) et (Z_1,S), de seules mesures invariantes respectives μ_X et ν_Z, il existe un facteur topologique quasi-automorphe $\pi : (X_1,S) \to (Z_1,S)$, il existe deux isomorphismes métriques $\psi_X : (X,T,\mu) \to (X_1,S,\mu_X)$ et $\psi_Z : (Z,T,\nu) \to (Z_1,S,\nu_Z)$, tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (X,T,\mu) & \xrightarrow[\textit{isomorphisme}]{\psi_X} & (X_1,S,\mu_X) \\ \phi \big\downarrow & & \big\downarrow \pi \\ (Z,T,\nu) & \xrightarrow[\psi_Z]{\textit{isomorphisme}} & (Z_1,S,\nu_Z) \end{array}$$

Si (Z,T,ν) est à spectre discret pur, on peut remplacer (Z_1,S,ν_Z) par une rotation sur un groupe monothétique compact de spectre correspondant.

Ce théorème peut s'obtenir comme corollaire d'un théorème de B. Weiss et de [FuWe] combiné à [DeKe], ou de [We] et d'une version généralisée de [FuWe], démontrée dans [DoLa2].

Dans le second sous-chapitre nous donnons un aperçu rapide et partiel des résultats topologiques ou spectraux concernant ces flots, et qui ont précédé [DoLa2].

Dans le troisième sous-chapitre sont exposés les résultats utilisés pour obtenir la caractérisation métrique pré-citée.

Dans le **quatrième** chapitre nous regroupons la présentation des résultats de [KwLa1,2], qui traitent du problème de l'*existence de systèmes ergodiques pour lesquels certaines valeurs d'invariants spectraux et/ou métriques peuvent coexister.* Ces travaux sont de nature très constructive.

D'abord nous exposons les théorèmes de limitation concernant le rang, l'ordre du groupe quotient dans le centralisateur, et la multiplicité, qui sont issus de [Ch2] et [Ki1,2] :

Théorème [Ch2], [Ki1,2]. *Soit (X,T,μ) un système ergodique de rang $r(T)$ fini.*

Soit $C(T)$ son centralisateur métrique, qui alors est un groupe, muni de la topologie de la convergence faible.

Soit $Wcl(T)$ la clôture dans cette topologie de l'ensemble des itérés de T : c'est un sous-groupe distingué de $C(T)$.

Notons $o(T)$ l'ordre du groupe quotient $C(T)/Wcl(T)$, et $m(T)$ la multiplicité spectrale de T. Alors

$$\begin{cases} (i) & \text{si } T \text{ est mélangeante, } o(T) \le r(T), \text{ et } Wcl(T) = \{T^n : n \in \mathbb{Z}\}; \\ (ii) & \text{si } r(T) = 1, \text{ alors } o(T) = 1 \text{ ("Weak closure theorem");} \\ (iii) & \text{on a toujours } m(T) \le r(T). \end{cases}$$

Puis nous énonçons ceux de [KwLa1,2] :

Théorème [KwLa1]. *Quels que soient $o \ge 1$ et $r \ge 2$ des entiers, éventuellement infinis, mais tels que $(o,r) \ne (\infty,\infty)$, il existe un système ergodique de rang r et dont l'ordre du groupe quotient dans le centralisateur vaut o, et tel que la clôture faible de l'ensemble des itérés de la transformation soit non dénombrable.*

Nous montrerons rapidement (cf. Remarque IV.1.6.) comment obtenir le couple $(o,r) = (\infty,\infty)$.

Concernant les paires multiplicité et rang, nous obtenons :

Théorème [KwLa2]. *Quels que soient m et r deux entiers tels que $1 \leq m \leq r < \infty$, il existe un système ergodique de rang r et de multiplicité spectrale égale à m.*

Les constructions de [KwLa1,2] ont en commun d'utiliser des extensions de groupe de machines à additionner déterminées par des *r-cocycles de Morse*. Dans les deux cas le calcul du rang se fait à l'aide d'une représentation symbolique du système construit. Une fois ces parties "communes" exposées, nous esquissons la méthode de calcul de l'ordre du groupe quotient, ou de la multiplicité.

En fil conducteur de notre présentation nous exposons les couples $(2, 3)$.

Au **cinquième** chapitre nous nous intéressons à la *conjecture de forte uniforme distribution de Khinchin*, dans le cas des chaînes.

Une *chaîne* $\mathcal{C}$ est un sous semi-groupe multiplicatif de $\mathbb{N}$ engendré par une suite fixée de nombres premiers $\mathbf{p} = p_1 < p_2 < \dots$.

Elle est de *dimension infinie* si le nombre de ses générateurs, les termes de $\mathbf{p}$, est infini. S'il n'y en a qu'un nombre fini, égal à d, nous disons qu'elle est *de dimension d*.

Soit $\mathbf{a} = (a_k)_{k\geq 1}$ l'énumération croissante des éléments de $\mathcal{C}$. Soit F un espace de fonctions mesurables, sur $[0, 1]$ équipé de la mesure de Lebesgue.

Nous dirons que $\mathcal{C}$ est *F-bonne pour (SK) (resp. (SR))* si quelle que soit $f \in F$, la convergence suivante a lieu presque sûrement ($\langle y \rangle$ désigne la partie fractionnaire du réel y) :

$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} f(\langle a_k x \rangle) \to \int_0^1 f(t)dt \qquad (SK)$$

$$(\text{resp. } \frac{1}{a_K} \sum_{u=1}^{a_K} f(\langle x + \frac{u}{a_K} \rangle) \to \int_0^1 f(t)dt \qquad (SR)\ )$$

La première convergence fait référence à la conjecture de Khinchin, la seconde ((SR)) au *problème des Sommes de Riemann.*

Si la convergence presque sûre dans l'une ou l'autre n'a pas lieu pour une certaine $f \in F$, nous qualifierons la chaîne $\mathcal{C}$ de *F-mauvaise* pour le problème correspondant.

Concernant ces deux problèmes de convergence, les résultats suivants étaient connus :

Si $\mathcal{C} = \mathbb{N}$, $\mathcal{C}$ est L^∞-mauvaise pour (SK) ([Ma]*, qui infirme la conjecture de Khinchin).*
Si $\mathcal{C}$ est de dimension 1, elle est L^1-bonne pour (SR) [Je] *et (SK) (Théorème de Birkhoff).*
Si $\mathcal{C}$ est de dimension infinie, elle est L^∞-mauvaise pour (SR) [Ru].
Si $\mathcal{C}$ est de dimension d, elle est $L \log L^{d-1}$-bonne pour (SR) [DuPi]*, et L^∞-bonne pour (SK)* [Ma]*. De plus, l'espace $L \log L^{d-1}$ est en un certain sens optimal* [BuWe].
Si $\mathcal{C}$ est de dimension finie, elle est L^1-bonne pour (SK) [Na1].

Il restait à savoir si une chaîne peut être de dimension infinie et L^1-bonne pour (SK), question posée dans [Na1].

Dans [La3], nous répondons à cette question sous la forme suivante :

Théorème [La3].
Il existe une chaîne admettant une infinité de générateurs et qui soit L^1-bonne pour (SK).
Si la densité inférieure de la chaîne est strictement positive, alors elle est L^∞-mauvaise pour (SK).
Il existe une chaîne de densité nulle et qui soit L^∞-mauvaise pour (SK).

Les bonnes chaînes y sont construites à l'aide du Théorème ergodique de Tempel'man, les mauvaises à l'aide de la méthode entropique [Bou], [RoWi].

Au dernier chapitre, le **sixième**, nous présentons notre étude de la renormalisation des systèmes de numération de l'intervalle, qui synthétise et simplifie certains résultats de [Ga], [Ša] et [Sc].

Après la définition générique d'un tel système, nous exposons rapidement les résultats de [La1], qui servent de motivation à l'étude de la renormalisation.

Soient λ la mesure de Lebesgue, et $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_i)_{i\geq 0}$ une suite de partitions en sous-intervalles de l'intervalle $[0, 1]$, telle que $\mathcal{P}_{i+1}$ soit plus fine que $\mathcal{P}_i$, et que l'union des atomes des $\mathcal{P}_i$ suffise à engendrer la tribu des ensembles Lebesgue mesurables.

Supposons que $\mathcal{P}_i = \{P_{i,j} : j \in E_i\}$ et que $P_{i,j} = (a_{i,j}, b_{i,j})$. Pour presque tout $x \in [0,1]$, il existe pour chaque i un unique $j_i(x) \in E_i$ tel que $x \in P_{i,j_i(x)}$. Pour chaque i, choisissons $t_i = t_{i,1}$ ou bien $t_i = t_{i,2}$, où

$$t_{i,1}(x) = \frac{x - a_{i,j_i(x)}}{b_{i,j_i(x)} - a_{i,j_i(x)}}, \qquad t_{i,2}(x) = \frac{b_{i,j_i(x)} - x}{b_{i,j_i(x)} - a_{i,j_i(x)}}.$$

Dans [LaTh] nous prouvons le

Théorème [LaTh]. *Supposons que pour Lebesgue presque tout $x \in [0,1]$,*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda(P_{i,j_i(x)})}{\lambda(P_{i-1,j_{i-1}(x)})} \to 0.$$

Alors presque sûrement, quel que soit $p \geq 1$, la suite $((t_i(x), \ldots, t_{i+p-1}(x))_{i\geq 0}$ est uniformément distribuée dans $[0,1]^p$ (autrement dit la suite $(t_i(x))_{i\geq 0}$ est complètement uniformément distribuée).

Supposons qu'il existe $q > 1$ et $k \geq 1$ des entiers tels que presque sûrement,

$$\frac{\lambda(P_{i+k,j_{i+k}(x)})}{\lambda(P_{i,j_i(x)})} < \frac{1}{q}.$$

Alors presque sûrement, la suite $(t_i(x))_{i\geq 0}$ est uniformément distribuée dans $[0,1]$.

Ce théorème s'applique très facilement. Sa seconde partie permet par exemple d'obtenir presque immédiatement que si T est la transformation des fractions continues, si (q_n) désigne la suite des dénominateurs des convergeants p_n/q_n dans l'algorithme des fractions continues, alors presque sûrement, la suite $(t_n(x))$, avec

$$t_n(x) = \frac{(q_n + q_{n-1})T^n x}{q_n + q_{n-1}T^n x},$$

est uniformément distribuée dans $[0,1]$.

La liste des références bibliographiques se trouve en fin de document.

§I : Systèmes dynamiques, préliminaires

Ce chapitre regroupe les définitions et résultats les plus fréquemment utilisés dans la théorie des *systèmes dynamiques.* Il sert de préambule aux Chapitres II-VI. Nous y avons distingué :
– les aspects topologiques;
– les aspects métriques et spectraux.

§ I.1 : les aspects topologiques.

Concernant la dynamique topologique nous nous référons à [Au], [El], [ElGo], [GoHe], et [HaKa] essentiellement.

Définition I.1.1.
Soient X un espace métrique compact et G un (semi)-groupe topologique.
Un (semi)-groupe de transformations est un triplet (X, G, π) où $\pi : X \times G \to X$ est continue et telle que (e est l'élément neutre de G)

$$\begin{cases} \pi(x,e) = x, \quad x \in X; \\ \pi(\pi(x,s),t) = \pi(x,st), \quad x \in X, \ s,t \in G. \end{cases}$$

Le triplet (X, G, π) est un système dynamique topologique.
Nous considérerons surtout le cas de $G = \mathbb{Z}$ (sauf au chapitre V où $G = \mathbb{N}^d$ ou bien $G = \cup_q \mathbb{N}^q$).
Lorsque $G = \mathbb{Z}$, il existe un homéomorphisme $T : X \to X$ tel que $\pi(x,n) = T^n x$. Le système dynamique est alors simplement défini par le couple (X,T).

Facteurs, récurrence, et mesures invariantes.

La dynamique topologique étudie la structure des "orbites", et essaye de savoir "distinguer"ou "rapprocher" deux flots topologiques (X,T) et (Y,S). Cette tentative trouve sa formulation la plus élémentaire (et la plus forte) grâce au concept de *facteur* :

Définition I.1.2.
On dit que (Y,S) est un facteur (topologique) de (X,T) (on dira aussi que le second flot est une extension du premier) s'il existe une application surjective continue $\phi : X \to Y$ telle que $\phi \circ T = S \circ \phi$. Nous noterons alors simplement

$$\phi : (X,T) \to (Y,S).$$

Si ϕ est bijective, nous dirons que les flots sont topologiquement isomorphes.
Nous désignerons souvent par la même lettre T à la fois l'action sur l'extension et sur le facteur.
Un invariant topologique est une propriété des flots topologiques invariante par isomorphisme topologique.
L'orbite d'un point x du flot (X,T) est l'ensemble

$$O(x) = \{T^n x : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Sa clôture d'orbite, notée $\bar{O}(x)$, est la clôture de son orbite dans la topologie de X.
Le flot engendré par x est le flot $(\bar{O}(x), T)$, qui est bien défini muni de la transformation restreinte.

En dynamique topologique, les *propriétés de récurrence* constituent un point important dans l'étude de la structure des orbites. Ceci est bien exposé dans [GoHe] (dont nous reprenons en partie la terminologie) (voire aussi [Fu2]).

Un sous-ensemble E de $\mathbb{Z}$ est dit *syndétique* (on dit aussi *à lacunes bornées*) si un nombre fini de ses translatés suffit à recouvrir $\mathbb{Z}$. Voici les notions de base concernant la récurrence :

Définition I.1.3.

Le point $x \in X$ est dit transitif s'il a une orbite dense dans X.

On dit que le flot (X,T) est transitif si X contient un point transitif.

On dit que x est périodique si son orbite $O(x)$ est compacte.

On dit que le flot (X,T) est périodique s'il contient un point transitif et périodique.

On dit que (X,T) est minimal si tous ses points sont transitifs, ou encore si quel que soit $x \in X$, $\bar{O}(x) = X$.

On dit que x est quasi-périodique si $\bar{O}(x)$ est minimal.

On dit que x est régulièrement quasi-périodique si quel que soit V un voisinage de x, l'ensemble des temps de retours de x à V, noté $\mathbb{Z}(V,x)$, et défini par

$$\mathbb{Z}(V,x) = \{n \in \mathbb{Z} : T^n x \in V\},$$

contient un sous-groupe syndétique de $\mathbb{Z}$.

Le point x est dit isochrone si quel que soit le voisinage V de x, $\mathbb{Z}(V,x)$ contient un translaté d'un sous-groupe syndétique de $\mathbb{Z}$.

Le flot (X,T) est dit équicontinu si la famille d'applications $\{T^n : n \in \mathbb{Z}\}$ est équicontinue.

Le flot (X,T) est dit expansif s'il existe $\delta > 0$ tel que quels que soient $x \neq x'$ dans X, $\sup_{n\in\mathbb{Z}} d(T^n x, T^n x') \geq \delta$ (ici d est une distance choisie sur X).

Une mesure invariante du flot (X,T) est une mesure de probabilités borélienne μ de X telle que $\mu \circ T = \mu$.

Nous noterons $M_T(X)$ leur ensemble, qui est non vide, et qui muni de la topologie de l'$\star$-faible convergence, est un espace métrique compact.

Un flot (X,T) est dit uniquement ergodique si Card $M_T(X) = 1$.

Il est strictement ergodique s'il est à la fois minimal et uniquement ergodique.

Citons le lien entre facteur et relation d'équivalence invariante fermée :

Proposition-Définition I.1.4.

Soient (X,T) un flot, et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence fermée sur X telle que si $x\mathcal{R}x'$, alors $Tx\mathcal{R}Tx'$ (on dit que $\mathcal{R}$ est T-invariante).

L'application quotient topologique $\pi_{\mathcal{R}} : X \to X/\mathcal{R}$ induit une $\mathbb{Z}$-action quotient engendrée par l'application induite $T_{\mathcal{R}} : X/\mathcal{R} \to X/\mathcal{R}$. Alors $\pi_{\mathcal{R}} : (X,T) \to (X/\mathcal{R}, T_{\mathcal{R}})$ est un facteur.

Réciproquement, étant donné $\pi : (X,T) \to (Y,S)$, en convenant que $x\mathcal{R}x'$ si et seulement si $\pi(x) = \pi(x')$, (Y,S) est topologiquement identique au flot $(X/\mathcal{R}, T_{\mathcal{R}})$.

Maintenant nous énumérons quelques remarques concernant la persistance des propriétés de récurrence par passage à un facteur, quelques propriétés liées à la quasi-périodicité, et introduisons *le facteur équicontinu maximal* :

Proposition-Définition I.1.5.

Un facteur d'un flot minimal (resp. transitif) est minimal (resp. transitif).

Un facteur d'un flot équicontinu est équicontinu.

Si un flot minimal contient un point isochrone, il contient un point régulièrement quasi-périodique, et on dit que c'est un flot régulièrement quasi-périodique.

Tout point d'un tel flot est isochrone.

Un point est quasi-périodique si et seulement si quel que soit son voisinage V, $\mathbb{Z}(V,x)$ est syndétique (ou à lacunes bornées).

Étant donné un flot (X,T), il admet un facteur équicontinu $\pi_e : (X,T) \to (Y,S)$ ayant la propriété suivante : tout facteur équicontinu $\pi : (X,T) \to (Z,R)$ se "factorise à travers" π_e, i.e. il existe un facteur $\pi_{Y,Z} : (Y,S) \to (Z,R)$ tel que

$$\pi = \pi_{Y,Z} \circ \pi_e.$$

On appelle π_e le facteur équicontinu maximal du flot (X,T).

Les deux propositions qui suivent permettront de caractériser topologiquement les flots de Toeplitz au chapitre III :

Proposition-Définition I.1.6.

Un facteur $\phi : (X,T) \to (Y,S)$ est dit quasi-automorphe s'il existe $y \in Y$ tel que Card $\phi^{-1}(\{y\}) = 1$. *On dit que y est un point de quasi-automorphie.*

Si $\phi : (X,T) \to (Y,S)$ est un facteur quasi-automorphe entre flots minimaux, et si (Y,S) est régulièrement quasi-périodique, alors le flot (X,T) est régulièrement quasi-périodique aussi.

Preuve. Soient y un point de quasi-automorphie, et x tel que $\phi(x) = y$. Soit (V_n) une base de voisinages de y. Alors $(\phi^{-1}(V_n))$ en est une de x. Et pour chaque V voisinage de x, il existe n tel que $\mathbb{Z}(V_n, y) = \mathbb{Z}(\phi^{-1}(V_n), x) \subseteq \mathbb{Z}(V, x)$, et donc, puisque y est isochrone, x l'est. Par minimalité, le flot (X,T) est régulièrement quasi-périodique aussi. ∎

Le résultat suivant se trouve dans [Pau], et utilise la *relation de quasi-proximalité régionale* [Au] qui détermine le facteur équicontinu maximal :

Proposition I.1.7.

Supposons qu'un flot minimal (X,T) admette un facteur équicontinu quasi-automorphe. Alors le flot équicontinu en question est son facteur équicontinu maximal.

Entropie, shifts, codes et complexité.

L'entropie topologique a été introduite dans [AdKoMA] (cf. [HaKa] où se trouvent des définitions équivalentes) :

Proposition-Définition I.1.8.

Soient (X,T) un flot topologique, et $\bar{\mathcal{U}}$ l'ensemble des recouvrements ouverts finis de X.

Si $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ et $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_m\}$ sont deux éléments de $\bar{\mathcal{U}}$, nous notons $\mathcal{U} \bigvee \mathcal{V} = \{U_i \cap V_j : U_i \cap V_j \neq \emptyset\}$ leur raffinement commun, et désignons par $N(\mathcal{U})$ le nombre de recouvrement de $\mathcal{U}$.

Nous notons $\mathcal{U}^n = \mathcal{U} \bigvee T^{-1}\mathcal{U} \bigvee \ldots \bigvee T^{-n+1}\mathcal{U}$.

Alors la limite $h(\mathcal{U}, T) = \lim_n \frac{1}{n} \log N(\mathcal{U}^n)$ existe.

L'entropie topologique de (X,T), notée $h_{top}(X,T)$, est définie par

$$h_{top}(X,T) = \sup_{\mathcal{U} \in \bar{\mathcal{U}}} h(\mathcal{U}, T).$$

C'est un invariant topologique, et si $\pi : (X,T) \to (Y,S)$ est un facteur, alors $h_{top}(X,T) \geq h_{top}(Y,S)$.

Une classe importante de flots (X,T), qui retiendra notre attention, est celle des *sous-shifts* [He] :

Proposition-Définition I.1.9.

Soit Σ un ensemble fini non vide muni de la topologie discrète : on l'appelle un alphabet.

Soit $\Omega = \Sigma^{\mathbb{Z}}$ muni de la topologie produit, et appelons shift ou décalage la transformation notée S de Ω dans lui-même définie par

$$(S\omega)_n = \omega_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Omega.$$

Un sous-shift (sur l'alphabet Σ) est un flot (X,S) avec $X \subset \Omega$ fermé et S-invariant ($SX = X$).

Soit (X,T) une $\mathbb{Z}$-action expansive, et supposons que X est (compact métrique) totalement discontinu. Alors (X,T) est topologiquement isomorphe à un sous-shift.

Dans le cas spécifique des sous-shifts, l'entropie et les facteurs s'expriment simplement :

Proposition-Définition I.1.10.

Soient Σ_1 *et* Σ_2 *deux alphabets, et notons* $\Sigma_1^\star$ *et* $\Sigma_2^\star$ *les ensembles correspondants de mots de longueur finie. On note* Σ_1^n *l'ensemble des mots de longueur* n *écrits sur l'alphabet* Σ_1*.*

Soient $n \geq 1$ *et* $p(n)$ *le nombre de mots de longueur* n *lus dans les éléments de* X*, où* (X,S) *est un sous-shift.*

Alors $h_{top}(X,S) = \lim_n \frac{1}{n} \log p(n)$*. La fonction* $(p(n))$ *est appelée la fonction complexité faible de* (X,S)*.*

Un code de longueur n *est une application* $f : \Sigma_1^n \to \Sigma_2$*.*

Soient (X,S) *et* (Y,S) *deux sous-shifts et* Σ_1*,* Σ_2 *leurs alphabets respectifs. On dit qu'un facteur* $\pi : (X,S) \to (Y,S)$ *est déterminé par un code* f *de longueur* $2l+1$ *s'il existe un code* $f : \Sigma_1^{2l+1} \to \Sigma_2$ *de longueur* $2l+1$ *tel que quels que soient* $x \in X$ *et* $k \in \mathbb{Z}$*,*

$$\pi(x)_n = f(x[n-l, n+l]).$$

Tout facteur entre sous-shifts est déterminé par un code, et tout code détermine un facteur de façon naturelle.

§ I.2 : les aspects métriques et spectraux.

Le lecteur pourra consulter [CoFoSi], [DeGrSi], [Kr], [Pa2] et [Rud], auxquels nous renvoyons pour les définitions et résultats qui suivent :

Définition I.2.1.

Soient X *un espace métrique compact et* μ *une mesure de probabilités borélienne sur* X*.*

Le couple (X,μ) *est un espace de Lebesgue.*

Soit T *un (semi)-groupe topologique, d'élément neutre* e*, que l'on muni de sa tribu borélienne.*

Une T*-action mesurée est un quadruplet* (X,T,μ,π) *remplissant les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} (i) & \pi : X \times T \to X \ \text{ est mesurable;} \\ (ii) & \pi(x,e) = x \ \ \mu \text{ presque sûrement;} \\ (iii) & \pi(\pi(x,s),t) = \pi(x,st) \ \mu \text{ p.s., pour tout } s,t \in T; \\ (iv) & \pi(\cdot,s)\mu = \mu, \text{ pour tout } s \in T. \end{cases}$$

Un ensemble mesurable $A \subset X$ *est* T*-invariant si pour tout* $t \in T$*,* $\pi(\cdot,t)^{-1}A = A$ *modulo* 0*.*

Le système (X,T,μ,π) *est dit ergodique si tout ensemble invariant est de mesure* 0 *ou* 1*.*

Soient $End(X,\mu)$ *et* $Aut(X,\mu)$ *les ensembles d'applications mesurables* $T : X \to X$ *définis par*

$$\begin{cases} End(X,\mu) = \{T : T\mu = \mu\} \qquad \text{(les endomorphismes)}, \\ Aut(X,\mu) = \{T \in End(X,\mu) : \text{il existe } T^{-1} \text{ et } T^{-1} \in End(X,\mu)\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(les automorphismes)}. \end{cases}$$

Une $\mathbb{Z}$ *resp.* $\mathbb{N}$*-action mesurée sur* (X,μ) *est alors déterminée par la donnée de* $T \in Aut(X,\mu)$ *resp.* $End(X,\mu)$*. Nous noterons simplement* (X,T,μ) *ou* T*.*

Étant donné une autre $\mathbb{Z}$*-action mesurable* (Y,S,ν)*, nous dirons qu'elle est un facteur de* (X,T,μ) *(ou que* (X,T,μ) *est une extension du facteur) s'il existe une application* $\phi : X \to Y$ *mesurable telle que* $\phi\mu = \nu$ *et* $\phi \circ T = S \circ \phi$*.*

Un isomorphisme est un facteur bijectif modulo 0 *et d'inverse mesurable. Nous parlerons alors de systèmes métriquement isomorphes.*

Un invariant métrique est une propriété des systèmes mesurés stable par isomorphisme métrique.

Nous désignerons souvent par la même lettre T *l'action sur le facteur et sur l'extension.*

Tribus invariantes, entropie, Pinsker, Principe variationnel et modèles topologiques.

Dans le cas mesuré ce sont les sous-tribus invariantes qui déterminent les facteurs [Roh] :

Proposition I.2.2.
Soient (X, T, μ) une $\mathbb{Z}$-action mesurée, et $\mathcal{F}$ une sous-tribu d'ensembles μ-mesurables et T-invariante (i.e. si $A \in \mathcal{F}$, alors $TA \in \mathcal{F}$).
Notons (Y, ν) l'espace de probabilité quotient de (X, μ) par les atomes de $\mathcal{F}$.
Alors l'application quotient induit une $\mathbb{Z}$-action mesurée sur (Y, ν), et produit donc un facteur entre les flots mesurés.
Réciproquement, tout facteur est déterminé par la tribu image réciproque dans l'extension de la tribu borélienne du facteur, de la façon décrite précédemment.

Pour les $\mathbb{Z}$-actions il existe une définition de l'entropie métrique :

Proposition-Définition I.2.3.
Soient $\mathcal{P}$ une partition finie mesurable de l'espace de Lebesgue (X, μ) et $\bar{\mathcal{P}}$ leur ensemble.
Notons $\mathcal{P} \bigvee \mathcal{Q}$ le raffinement commun à $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \bar{\mathcal{P}}$.
Notons $h_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log \mu(P)$.
Soit $T \in Aut(X, \mu)$. Comme $h_\mu(\mathcal{P} \bigvee \mathcal{Q}) \leq h_\mu(\mathcal{P}) + h_\mu(\mathcal{Q})$, il s'ensuit qu'en posant $\mathcal{P}^n = P \bigvee T^{-1}\mathcal{P} \bigvee \ldots \bigvee T^{-n+1}\mathcal{P}$, la limite $h_\mu(\mathcal{P}, T) = \lim_n \frac{1}{n} h_\mu(\mathcal{P}^n)$ existe.
Alors l'entropie métrique de (X, T, μ), notée $h_\mu(X, T)$, est définie par

$$h_\mu(X, T) = \sup_{\mathcal{P} \in \bar{\mathcal{P}}} h_\mu(\mathcal{P}, T).$$

C'est un invariant métrique : l'entropie d'un facteur est moindre que celle de son extension.

Parmi les facteurs d'entropie nulle d'un flot mesuré, l'un, le "facteur de Pinsker", se distingue plus particulièrement :

Proposition-Définition I.2.4.
Il existe, parmi tous les facteurs métriques d'entropie nulle de (X, T, μ), un facteur $\pi : (X, T, \mu) \to (Y, S, \nu)$ d'entropie nulle ayant la propriété de maximalité suivante : quel que soit le facteur $\phi : (X, T, \mu) \to (Z, R, \lambda)$ tel que $h_\lambda(Z, R) = 0$, il existe un facteur $\psi : (Y, S, \nu) \to (Z, R, \lambda)$ tel que

$$\phi = \psi \circ \pi.$$

Le facteur (Y, S, ν) est appelé le facteur de Pinsker ou facteur maximal d'entropie métrique nulle. C'est un invariant d'isomorphisme métrique.

Un lien important entre les entropies topologiques et métriques pour les $\mathbb{Z}$-actions est le *principe variationnel* [DeGrSi] :

Théorème I.2.5.
Étant donné une $\mathbb{Z}$-action (X, T), on a

$$h_{top}(X, T) = \sup_{\mu \in M_T(X)} h_\mu(X, T).$$

Pour un sous-shift strictement ergodique les entropies topologiques et métriques coïncident donc de façon naturelle.
Le théorème de *Jewett-Krieger* [DeGrSi] permet de représenter un flot mesuré ergodique d'entropie finie par un sous-shift strictement ergodique :

Théorème I.2.6.
Soit (X, T, μ) une $\mathbb{Z}$-action ergodique d'entropie métrique finie. Alors le flot (X, T, μ) est métriquement isomorphe à un sous-shift strictement ergodique (muni de sa seule mesure de probabilités invariante).

Pour les sous-shifts strictement ergodiques, nous pouvons relier la seule mesure invariante aux fréquences d'apparitions de mots :

Proposition-Définition I.2.7.
Soient (X, S) un sous-shift strictement ergodique sur l'alphabet Σ, et μ telle que $M_S(X) = \{\mu\}$.
Soient B un mot de longueur n sur Σ, et $k \in \mathbb{Z}$: posons

$$[B]_k = \{x \in X : x[k, k+n[= B\}.$$

Alors quels que soient $x \in X$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mu([B]_k) = \lim_m \frac{1}{m} \text{Card } \{0 \leq i < m : x[i, i+n[= B\}.$$

La limite ci-dessus s'appelle la fréquence d'apparition du mot B dans x.

Propriétés spectrales.

Nous renvoyons le lecteur à [CoFoSi], [Pa2].

Proposition-Définition I.2.8.
Soit (X, μ) un espace de Lebesgue.
Soit $T \in Aut(X, \mu)$.
Notons $L_0^2(\mu)$ l'ensemble des $f \in L^2(\mu)$ d'espérance nulle.
Notons U_T l'opérateur unitaire $U_T : L_0^2(\mu) \to L_0^2(\mu)$ défini par

$$U_T f = f \circ T, \ \ f \in L_0^2(\mu).$$

Les valeurs propres de U_T sont de module 1, et elles constituent un sous-groupe multiplicatif dénombrable de $\{|z| = 1\}$.

Étant donnée $f \in L_0^2(\mu)$, notons $H(f)$ le sous-espace fermé de $L_0^2(\mu)$ engendré par les itérés de f sous U_T.

Comme la suite $(< U_T^n f, f >)_{n \in \mathbb{Z}}$ est définie positive, elle s'identifie à celle des coefficients de Fourier d'une unique mesure borélienne σ_f sur $\{|z| = 1\}$.

La mesure σ_f est la mesure spectrale de f.

Il existe une décomposition canonique

$$L_0^2(\mu) = \bigoplus_{i \geq 0} H(f_i),$$

avec $\sigma_{f_{i+1}} \ll \sigma_{f_i}$ (absolue continuité).

Le type de la mesure σ_{f_0} est le type spectral maximal de U_T.

Appelons A_0 le support de σ_{f_0} et A_{i+1} le support de $d\sigma_{f_{i+1}}/d\sigma_{f_i}$. La fonction $\sum_{i \geq 0} \mathbf{1}_{A_i}$ définie σ_{f_0} presque sûrement est la fonction multiplicité spectrale.

Son image essentielle est l'ensemble des multiplicités spectrales, et la multiplicité spectrale, notée $m(T)$, est le maximum des multiplicités spectrales.

La décomposition spectrale est décrite par la donnée du type de la mesure σ_{f_0} ainsi que la fonction multiplicité.

On dit que T a un spectre simple si $m(T) = 1$ ($L_0^2(\mu)$ est cyclique).

Le spectre est dit continu ou discret selon que σ_{f_0} est continue ou discrète.

Le spectre est pur s'il n'est pas mixte, i.e. σ_{f_0} est purement continue, ou purement discrète.

Le spectre est dit Lebesgue si σ_{f_0} est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Sinon il est singulier.

Le spectre discret est celui de l'opérateur U_T restreint au sous-espace fermé de $L_0^2(\mu)$ engendré par ses fonctions propres.

Le spectre rationnel est celui de U_T restreint au sous-espace fermé de $L_0^2(\mu)$ engendré par ses fonctions propres associées à ses valeurs propres racines de l'unité.

Si le système (X, T, μ) est ergodique et a un spectre discret pur, il est métriquement isomorphe à une rotation ergodique sur un groupe monothétique compact. Alors les invariants métriques et spectraux coïncident.

Un invariant spectral de T est un invariant unitaire de la paire $(L_0^2(\mu), U_T)$.

Le système est ergodique si 1 n'est pas valeur propre de U_T.

Il est faiblement mélangeant si U_T n'a pas de valeur propre.

Le facteur à spectre discret maximal du flot ergodique (X, T, μ) est celui associé à la sous-tribu rendant les fonctions propres de U_T mesurables.

Le facteur à spectre discret rationnel maximal du flot ergodique (X, T, μ) est celui associé à la sous-tribu rendant les fonctions propres associées à des valeurs propres racines de l'unité de U_T mesurables.

Partitions, tours, rang, approximations cycliques, centralisateur.

Voici le “Lemme de Rohlin” [Rud, p. 33], [We1], qui est un outil important en dynamique métrique :

Proposition-Définition I.2.9.

Soit (X, T, μ) une $\mathbb{Z}$-action non périodique.

Alors quels que soient $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$ il existe $F \subset X$ mesurable tel que les ensembles $F, TF, \ldots, T^{n-1}F$ sont deux à deux disjoints et

$$\mu(\sum_{i=0}^{n-1} T^i F) \geq 1 - \varepsilon.$$

Sans la condition sur ε, la famille $(F, TF, \ldots, T^{n-1}F)$ est appelée une tour de Rohlin de hauteur n et de base F.

Notons $\mathcal{E}$ la partition par points de X.

Définition I.2.10.

Nous dirons qu'une suite $(\mathcal{P}_n)$ de partitions mesurables de l'espace de Lebesgue (X, μ) converge vers $\mathcal{E}$ si quels que soient $A \subset X$ mesurable et $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$ et $\sigma(\mathcal{P}_n)$ désigne la tribu engendrée par $\mathcal{P}_n$, il existe $A_n \in \sigma(\mathcal{P}_n)$ vérifiant $\mu(A \triangle A_n) < \varepsilon$.

Nous noterons $\mathcal{P}_n \to \mathcal{E}$.

Nous dirons que la suite $(\mathcal{P}_n)$ de partitions mesurables de (X, μ) décroît si pour chaque n, $\mathcal{P}_{n+1}$ est plus fine que $\mathcal{P}_n$.

On trouvera dans [Fe] beaucoup de détails sur le rang :

Proposition-Définition I.2.11.

Le système (X, T, μ) est de rang au plus r si pour tout $k \geq 1$, il existe r sous-ensembles mesurables F_k^j, $1 \leq j \leq r$, et r entiers n_k^j, tels que pour chaque $1 \leq j \leq r$, $(F_k^j, TF_k^j, \ldots, T^{n_k^j - 1}F_k^j)$ est une tour de Rohlin, et si

$$G_k = X \setminus \cup_{j=1}^{r} \cup_{l=0}^{n_k^j - 1} T^l F_k^j,$$
$$\mathcal{P}_k = \{G_k,\ T^l F_k^j : 0 \leq l < n_k^j,\ 1 \leq j \leq r\},$$

alors $\mathcal{P}_k \to \mathcal{E}$ et $(\mathcal{P}_k)$ décroît.

Le système est de rang r s'il est de rang au plus r mais pas au plus $r - 1$.

S'il n'existe pas de tel entier r, nous dirons qu'il est de rang infini.

Nous notons $r(T)$ le rang du système (X, T, μ).

Alors $1 \leq r(T) \leq \infty$, et c'est un invariant métrique.

L'inégalité suivante relie la multiplicité $m(T)$ au rang $r(T)$ [Ch2] *:*

$$m(T) \leq r(T).$$

Suivant [CoFoSi, Chap. 15], nous avons la

Proposition-Définition I.2.12.

Si (X, T, μ) est une $\mathbb{Z}$-action mesurée, nous dirons que T admet une approximation cyclique de vitesse $f(n)$ s'il existe une suite de partitions mesurables $\mathcal{P}_n = \{C_0, \ldots, C_{h_n-1}\}$ qui converge vers $\mathcal{E}$, des automorphismes T_n de (X, μ) qui permutent cycliquement les éléments de $\mathcal{P}_n$, tels que

$$\sum_{j=0}^{h_n-1} \mu(TC_j \triangle T_n C_j) < f(h_n).$$

Si T admet des approximations cycliques de vitesse θ/n, $\theta < 1$, alors (X, T, μ) a un spectre simple.
Et si la vitesse est $o(1/n)$, (X, T, μ) est de rang 1.
Si (X, T, μ) admet des approximations cycliques de vitesse θ/n avec $\theta < 4$, alors (X, T, μ) est ergodique.

Un objet important dans l'étude des systèmes mesurés est le centralisateur métrique [Ki1,2], [New1,2] :

Proposition-Définition I.2.13.

Soit (X, T, μ) une $\mathbb{Z}$-action.
Le centralisateur métrique de T est l'ensemble $C(T)$ défini par

$$C(T) = \{S \in End(X, \mu) : S \circ T = T \circ S\}.$$

On dit que le système est métriquement coalescent si $C(T)$ est un groupe.
C'est le cas si sa multiplicité $m(T)$ est finie [New1], *et donc également si son rang l'est.*
Le centralisateur est muni de la topologie métrique complète déterminée par la convergence faible :

$$S_n \to S \Leftrightarrow \textit{quel que soit } A \subset X \textit{ mesurable}, \ \mu(S^{-1}A \triangle S_n^{-1}A) \to 0.$$

Notons $Wcl(T)$ la clôture dans cette topologie de l'ensemble $\{T^n : n \in \mathbb{Z}\}$: c'est un groupe, et si $C_1(T)$ désigne le groupe des éléments inversibles de $C(T)$, $Wcl(T)$ en est un sous-groupe distingué.
Le groupe quotient dans le centralisateur est le quotient

$$C_1(T) \big/ Wcl(T).$$

L'ordre du groupe quotient dans le centralisateur sera noté $o(T)$.

§II : Le facteur maximal d'entropie topologique nulle

Considérons une $\mathbb{Z}$-action topologique (X,T) (cf. Déf^{tn} I.1.1.), et choisissons une mesure de probabilités ergodique T-invariante $\mu \in M_T(X)$ (cf. Déf^{tn} I.1.3.), qui détermine le flot mesuré (X,T,μ) (cf. Déf^{tn} I.2.1.).

Considérons les points connus suivants :
• l'entropie topologique $h_{top}(X,T)$ (cf. Prop.-Déf^{tn} I.1.8.).
• l'entropie métrique $h_\mu(X,T)$ (cf. Prop.-Déf^{tn} I.2.3.).

• le facteur équicontinu maximal (cf. Déf^{tn} I.1.2. et Prop.-Déf^{tn} I.1.5.).
• le facteur à spectre discret maximal (cf. Déf^{tn} I.2.2. et Prop.-Déf^{tn} I.2.8.).

• le facteur maximal d'entropie métrique nulle (cf. Prop.-Déf^{tn} I.2.4.).

La “pièce manquante” apparaît toute seule : c'est le *facteur maximal d'entropie topologique nulle*, dont on conçoit aisément la notion. Le point essentiel de [BlLa] est la preuve de son existence.

Nous présentons ci-après et successivement :
– les constructions de base de F. Blanchard;
– le facteur maximal d'entropie topologique nulle;
– une sélection de résultats récents concernant les facteurs maximaux d'entropie topologique nulle.

§ II.1 : les constructions de base de F. Blanchard.

Dans [Bl1] est introduite la notion de *recouvrement standard*, et dans [Bl2] celle de *couple d'entropie*, accompagnée des preuves des propriétés essentielles associées. Nous regroupons tout cela dans l'énoncé suivant :

Proposition-Définition II.1.1. *Un recouvrement $\mathcal{U} = \{U,V\}$ de X par deux ouverts non denses est un recouvrement standard.*

Étant donné un tel recouvrement, deux points $x \neq x' \in X$ sont dits séparés par $\mathcal{U}$ si $x \in Int(X \setminus U)$ et $x' \in Int(X \setminus V)$.

Un couple $(x,x') \in X^2$ est appelé un couple d'entropie si dès que $\mathcal{U}$ est un recouvrement standard séparant x et x',

$$h_{top}(\mathcal{U},T) > 0.$$

L'ensemble des couples d'entropie est noté $E(X,T)$.

Alors $h_{top}(X,T) > 0$ si et seulement si $E(X,T) \neq \emptyset$.

Soit $\phi : (X,T) \to (Y,S)$ un facteur topologique. Alors

$$\begin{array}{ll} (i) & \text{si } (x,x') \in E(X,T) \text{ et } \phi(x) \neq \phi(x'), \text{ alors } (\phi(x),\phi(x')) \in E(Y,S); \\ (ii) & \text{si } (y,y') \in E(Y,S), \text{ il existe } (x,x') \in E(X,T) \cap (\phi^{-1}(\{y\}) \times \phi^{-1}(\{y'\})). \end{array}$$

§ II.2 : le facteur maximal d'entropie topologique nulle.

Énonçons d'abord le résultat principal de [BlLa] :

Théorème II.2.1. *Étant donné un flot topologique (X,T), il existe un facteur topologique $\pi_0 : (X,T) \to (X_0,T)$ unique à isomorphisme près, tel que l'entropie topologique de (X_0,T) soit nulle, et ayant la propriété de maximalité suivante : quel que soit le facteur $\pi_1 : (X,T) \to (X_1,T)$ tel que $h_{top}(X_1,T) = 0$, il existe un facteur $\pi_{0,1} : (X_0,T) \to (X_1,T)$ tel que*

$$\pi_1 = \pi_{0,1} \circ \pi_0.$$

La preuve est élémentaire : (X_0,T) est le flot quotient de (X,T) par la plus petite relation d'équivalence T-invariante fermée contenant $E(X,T)$ (voire Prop^{tn} I.1.4.).

Ensuite dans [BlLa] nous énonçons quelques applications.

Le flot (X,T) est un *K-système topologique* si, $\triangle_X$ désignant la diagonale de X^2,

$$E(X,T) \cup \triangle_X = X \times X.$$

Ceci équivaut à ce que $h_{top}(\mathcal{U},T) > 0$ dès que $\mathcal{U}$ est un recouvrement standard de X.

Un tel système est alors topologiquement faiblement mélangeant [Bl1] (i.e. $(X \times X, T \times T)$ a une orbite dense, cf. Déf^{tn} I.1.2.).

Dans [Bl1] il est démontré que si (X,T) est un K-système topologique et (Y,S) est minimal d'entropie nulle, alors $(X \times Y, T \times S)$ est tel que le seul fermé $T \times S$-invariant de projections pleines de $X \times Y$ est $X \times Y$ (les flots sont alors dits *topologiquement disjoints*).

Proposition II.2.2. *Soient (X,T) un K-système topologique, et (Y,S) d'entropie nulle tel que Y contienne un ensemble dense de points quasi-périodiques. Alors, $\triangle_{X\times Y}$ désignant la diagonale de $(X \times Y)^2$,*

$$E(X \times Y, T \times S) \cup \triangle_{X\times Y} = \{((x,y),(x',y)) : x, x' \in X,\ y \in Y\},$$

et donc le facteur maximal d'entropie topologique nulle de $(X \times Y, T \times S)$ est égal à (Y,S).

Dans le cas métrique le "*Pinsker du produit est le produit des Pinskers*" [Pa2] : nous donnons dans [BlLa] un exemple de produit d'un K-système topologique par un flot d'entropie nulle dont le Pinsker topologique n'est pas égal au flot d'entropie nulle en question.

Rappelons [Fu1] que pour que deux flots soient topologiquement disjoints il est nécessaire que l'un au moins soit minimal. Nous obtenons dans [BlLa] la

Proposition II.2.3. *Seul le flot trivial est disjoint de tous les flots de Pinsker topologique trivial.*

Métriquement, deux flots ergodiques (cf. Prop.-Déf^{tn} I.2.1.) sont disjoints si la seule mesure de probabilités invariante pour l'action produit et dont les marginales sont égales aux mesures des facteurs, est la mesure produit [Fu1]. Un système ergodique est un *K-système métrique* si et seulement s'il est métriquement disjoint de tous les flots mesurés ergodiques d'entropie métrique nulle [Rud].

Les Propositions II.2.2. et II.2.3. nous montrent donc que l'analogie topologique-métrique est limitée.

En appendice de [BlLa] nous donnons les premières définitions de K-système topologique relativement à un facteur, qui seront exploitées plus tard par d'autres auteurs [GlWe3].

§ II.3 : une sélection de résultats récents concernant les facteurs maximaux d'entropie topologique nulle.

L'apparition des couples d'entropie et des facteurs maximaux d'entropie topologique nulle a suscité la recherche de quelques auteurs dans cette voie nouvelle. Les contre-exemples de [BlLa] ont motivé cette recherche partiellement. Les questions naturelles étaient de déterminer la structure topologique de l'ensemble des couples d'entropie, et de décrire le "Pinsker topologique" d'un produit.

Le premier pas vers les réponses à ces questions a été fait dans [BlHoMaMaRu], où le biais de la mesure, qui s'est avéré essentiel par la suite, est introduit :

Définition-Théorème II.3.1. *Soient (X,T) une $\mathbb{Z}$-action topologique, et μ une mesure T-invariante.*

Deux points $x \neq x'$ constituent un μ-couple d'entropie si quelle que soit la partition mesurable $\mathcal{P} = \{F, X \setminus F\}$ telle que F contienne un voisinage de x et $X \setminus F$ en contienne un de x' (on dit alors que $\mathcal{P}$ sépare x et x'),

$$h_\mu(\mathcal{P},T) > 0.$$

Notons $E_\mu(X,T)$ leur ensemble.

Les μ-couples d'entropie sont toujours des couples d'entropie topologique.

Si $h_\mu(X,T) > 0$, alors $E_\mu(X,T) \neq \emptyset$.

Soit $\phi : (X,T) \to (Y,S)$ un facteur : alors

$$\begin{array}{ll} (i) & \textit{si } F \textit{ est ouvert non dense et si } h_\mu(\{F, X \setminus F\}, T) > 0 \\ & \textit{alors il existe } (x,x') \in E_\mu(X,T) \textit{ tels que } \{F, X \setminus F\} \textit{ sépare } x \textit{ et } x'; \\ (ii) & \textit{si } (x,x') \in E_\mu(X,T) \textit{ et } \phi(x) \neq \phi(x'), \textit{ alors } (\phi(x), \phi(x')) \in E_{\phi\mu}(Y,S). \end{array}$$

En notant $\pi_{h_\mu} : (X,T) \to (X_{h_\mu}, T_{h_\mu})$ le facteur quotient par la plus petite relation d'équivalence T-invariante fermée contenant $E_\mu(X,T)$, on obtient le facteur topologique maximal de μ-entropie nulle.

Si (X,T) est uniquement ergodique, et μ est sa seule mesure invariante, alors les μ-couples d'entropie sont exactement les couples d'entropie topologique.

La question naturelle qui en découle fut résolue dans [BlGlHo], où $E(X,T)$ et les "$E_\mu(X,T)$" sont complètement reliés :

Théorème II.3.2. *Soit $\phi : (X,T) \to (Y,S)$ un facteur et $\mu \in M_T(X)$ une mesure invariante.*

Supposons que $(y,y') \in E_{\phi\mu}(Y,S)$.

Alors il existe $(x,x') \in E_\mu(X,T) \cap (\phi^{-1}(\{y\}) \times \phi^{-1}(\{y'\}))$.

Il existe toujours $\mu \in M_T(X)$ telle que

$$E(X,T) = E_\mu(X,T).$$

Cependant, on ne peut pas toujours choisir μ ergodique.

Mais en notant $M_T^e(X)$ le sous-ensemble de $M_T(X)$ constitué des mesures ergodiques,

$$E(X,T) \cup \triangle_X = \overline{\cup_{\mu \in M_T^e(X)} E_\mu(X,T)}.$$

C'est finalement E. Glasner qui a su localiser les couples d'entropie topologique [Gl]. Il y a obtenu des liaisons fines entre la relation de proximalité [Au] et l'ensemble $E(X,T)$, et également donné une description complète du Pinsker topologique d'un produit.

Nous ne citerons que le résultat suivant de [Gl] :

Théorème II.3.3. *Soient $\pi : (X,T) \to (Y,S)$ un facteur topologique, $\mu \in M_T(X)$ et supposons que $(Y,S,\pi\mu)$ soit le Pinsker métrique du système (X,T,μ).*

Soit $\mu = \int_Y \mu_y d\pi\mu(y)$ une décomposition de la mesure μ suivant π [CoFoSi], et

$$\lambda = \int_Y (\mu_y \times \mu_y) d\pi\mu(y)$$

le produit indépendant de μ par elle-même au-dessus de $\pi\mu$.

Soit Λ_μ le support topologique de λ. Alors

$$\begin{array}{ll} (i) & E_\mu(X,T) = \Lambda_\mu \setminus \triangle_X; \\ (ii) & \textit{si } \mu \in M_T^e(X) \textit{ alors } \overline{E_\mu(X,T)} = \Lambda_\mu; \\ (iii) & \textit{si } h_{top}(X,T) > 0 \textit{ alors il existe } \mu \in M_T(X) \textit{ telle que } E(X,T) = \Lambda_\mu \setminus \triangle_X; \\ (iv) & \overline{E(X,T)} = \overline{\cup_{\mu \in M_T^e(X)} \Lambda_\mu}. \end{array}$$

Mentionnons également [GlWe2], où E. Glasner et B. Weiss prouvent un théorème de type Jewett-Krieger (cf. Théorème I.2.6.), et répondent à une question de [Bl2] et une de [GlWe3] (rappelons qu'un K-système topologique a un Pinsker topologique trivial) :

Théorème II.3.4. *Étant donnée une $\mathbb{Z}$-action mesurée ergodique (X,T,μ) d'entropie $h_\mu(X,T) > 0$, il existe un K-système topologique strictement ergodique qui lui est métriquement isomorphe.*

Pour conclure, indiquons [GlWe1,4] où la notion de facteur d'entropie nulle est étudiée pour les *quasi-facteurs* et les *flots adjacents* sur $M_T(X)$.

§III : les flots de Toeplitz

L'appellation "Toeplitz" fut introduite par K. Jacobs et M. Keane [JaKe] (cf. [Ne] aussi), en référence aux travaux de O. Toeplitz sur les fonctions presque périodiques [Toe].

Cependant les suites et flots de Toeplitz apparaissent plus tôt dans la littérature [GaHe], [Ox], [Fu1]; ces suites sont appelées les éléments régulièrement quasi-périodiques du shift par W. Gottschalk et G. Hedlund [GoHe] (cf. Déf^{tn} I.1.3.).

Les flots associés ont souvent été utilisés comme (contre)-exemples illustratifs de certains phénomènes dynamiques, par exemple concernant l'existence de flots minimaux non uniquement ergodiques.

Nous avons plutôt envisagé ces flots en tant que classe spécifique, et tenté d'en comprendre certains aspects métriques et/ou topologiques. Du point de vue topologique, on sait depuis [MaPa] que *les flots de Toeplitz sont exactement les sous-shifts minimaux extensions quasi-automorphes de machines à additionner.*

Nous avions caractérisé dans [DoKwLa] l'isomorphisme topologique des flots de Toeplitz, et y avions construit des flots de Toeplitz d'entropie topologique prescrite (cf. Prop.-Déf^{tn} I.1.8.).

Dans [IwLa] et [DoLa1,2] nous avons étudié aussi l'aspect métrique et spectral dans cette classe de flots.

Nous scindons ce chapitre en les sous-chapitres suivants :
– la définition, le facteur équicontinu maximal, et les caractérisations topologiques et métriques;
– un petit tour d'horizon des résultats avant la caractérisation métrique;
– les extensions quasi-automorphes de type Furstenberg-Weiss.

§ III.1 : la définition, le facteur équicontinu maximal, et les caractérisations topologiques et métriques.

Nous renvoyons le lecteur aux (Prop.-)Déf^{tns} I.1.2-3, I.1.5 et I.1.9. concernant les clôtures d'orbites, les flots régulièrement quasi-périodiques et les sous-shifts, dont nous conservons les notations.

Définition III.1.1. *Une suite de Toeplitz sur l'alphabet Σ est un élément η non périodique et régulièrement quasi-périodique de Ω.*

Un flot de Toeplitz $(\bar{O}(\eta), S)$ est le flot associé à une suite de Toeplitz.

Les flots de Toeplitz sont donc les sous-shifts régulièrement quasi-périodiques non périodiques (en particulier ils sont minimaux).

Autrement dit, une suite non périodique $\eta \in \Omega$ est une suite de Toeplitz si et seulement si elle est non périodique mais toutefois, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$ (une position), il existe $p(n) \in \mathbb{N}$ (une période), tels que quel que soit $k \in \mathbb{Z}$ (un multiple),

$$\eta_n = \eta_{n+kp(n)}.$$

Ou encore, avec les "temps de retour" introduits dans la Déf^{tn} I.1.3., η est une suite de Toeplitz si et seulement si quel que soit V un voisinage de η,

$$\begin{cases} \mathbb{Z}(V,\eta) \text{ contient un sous-groupe syndétique de } \mathbb{Z}, \\ \text{mais } \eta \text{ n'est pas périodique.} \end{cases}$$

Il s'agit donc simplement d'un affaiblissement minimal de la condition de récurrrence, évidente, qui caractérise les suites périodiques. On élimine la périodicité qui, du point de vue de la dynamique engendrée, est triviale.

De telles suites existent. Elles apparaissent dans différents contextes, par exemple en théorie des nombres combinatoire [AlBa].

Pour les étudier du point de vue dynamique, la construction de S. Williams [Wi] est très utile :

Proposition-Définition III.1.2. *Soient η une suite de Toeplitz, $n \in \mathbb{Z}$, et $\beta \in \bar{O}(\eta)$.*

Définissons

$$Per_\beta(n) = \{p \in \mathbb{N} : p > 0 \ et \, \forall k \in \mathbb{Z}, \beta_n = \beta_{n+kp}\},$$

l'ensemble des périodes associées à la position n dans β.

Étant donné $p > 0$ un entier, définissons aussi

$$Per_p(\beta) = \{n \in \mathbb{Z} : p \in Per_\beta(n)\},$$

l'ensemble des positions de β admettant p pour période.

Alors il existe une suite $\mathbf{p} = (p_t)_{t\geq 0}$ telle que

$$\begin{cases} (i) & \text{quel que soit } n \in \mathbb{Z}, \text{ il existe } t \geq 0 \text{ tel que } p_t \in Per_\eta(n); \\ (ii) & \text{quels que soient } t \geq 0 \text{ et } q > 0, \text{ si } Per_{p_t}(\eta) = Per_{p_t}(\eta) - q \text{ (translaté),} \\ & \text{alors } p_t \text{ divise } q; \\ (iii) & \text{quel que soit } t \geq 0, \ p_t \text{ divise strictement } p_{t+1}. \end{cases}$$

Une telle suite $\mathbf{p}$ s'appelle une **structure de périodes** *de η.*

Étant donnée une structure de périodes $\mathbf{p}$, quel que soit $\beta \in \bar{O}(\eta)$, il existe une unique suite d'entiers $(g_t(\beta))_{t\geq 0} \in \prod_{t\geq 0} [0, p_t[_{\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} (a) & Per_{p_t}(\beta) = Per_{p_t}(\eta) - g_t(\beta) \ (\text{translaté}); \\ (b) & g_{t+1}(\beta) \equiv g_t(\beta) \mod p_t. \end{cases}$$

Facteur équicontinu maximal et caractérisation topologique.

Introduisons
$$G_p = \{(g_t)_{t\geq 0} \in \prod_{t\geq 0} [0, p_t[_{\mathbb{N}} : g_{t+1} \equiv g_t \mod p_t,\ t \geq 0\}.$$
C'est le groupe des entiers **p**-adiques [HeRo].
Il a une structure d'anneau topologique abélien.
Soit m_p sa mesure de Haar normalisée, et soit $\hat{\mathbf{1}} = (1, 1, \dots, 1, \dots)$.
Alors $\{n\hat{1} : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans G_p.
Soit $\tau : G_p \to G_p$ la rotation par $\hat{1}$ ($\tau(g) = g + \hat{1}$, $g \in G_p$).
Le flot (G_p, τ) est ce que l'on appelle une *machine à additionner.*
Il est *strictement ergodique et équicontinu.*
Soit
$$\pi_\eta : \bar{O}(\eta) \to G_p \text{ définie par } \pi_\eta(\beta) = (g_t(\beta))_{t\geq 0},\ \beta \in \bar{O}(\eta).$$
Utilisant les constructions précédentes et les résultats de [Pau], S. Williams [Wi] montre comment construire le facteur équicontinu maximal d'un flot de Toeplitz (cf. Prop.-Déf^{tn} I.1.5.) (les Prop^{tns} I.1.6-7 permettent facilement de les caractériser topologiquement) :

Théorème III.1.3. *Si η est une suite de Toeplitz, l'application π_η est continue, et vérifie $\pi_\eta \circ S = \tau \circ \pi_\eta$.*

De plus, si $g \in G_p$, Card $\pi_\eta^{-1}(\{g\}) = 1$ *si et seulement si il existe une suite de Toeplitz $\beta \in \bar{O}(\eta)$ telle que $\pi_\eta(\beta) = g$.*

Le facteur $\pi_\eta : (\bar{O}(\eta), S) \to (G_p, \tau)$ est le facteur équicontinu maximal de $(\bar{O}(\eta), S)$.

Les flots de Toeplitz sont exactement les sous-shifts minimaux extensions quasi-automorphes des flots (G_p, τ).

Caractérisation métrique.

Soit ν une mesure de probabilités S-invariante et ergodique de $(\bar{O}(\eta), S)$.
Alors l'entropie topologique $h_{top}(\bar{O}(\eta), S)$ ne dépasse pas $\log \text{Card}\, \Sigma$ (cf. Prop.-Déf^{tns} I.1.8. et I.1.10.).
De plus, π_η étant un facteur topologique, et (G_p, τ) étant strictement ergodique, il est nécessaire que $\pi_\eta \nu = m_p$.
Nous avons donc un facteur métrique (cf. Déf^{tn} I.2.1.)
$$\pi_\eta : (\bar{O}(\eta), S, \nu) \to (G_p, \tau, m_p).$$
Remarquons que d'après le principe variationnel (cf. Théorème I.2.5.),
$$h_\nu(\bar{O}(\eta), S) \leq h_{top}(\bar{O}(\eta), S) \leq \log \text{Card}\, \Sigma.$$
Le flot mesuré (G_p, τ, m_p) est caractérisé par son spectre (cf. Prop.-Déf^{tn} I.2.8.) qui est purement discret, rationnel, et infini.

Ainsi pour qu'un flot (X, T, μ) puisse être métriquement isomorphe à un flot de Toeplitz strictement ergodique, il est nécessaire que les trois conditions suivantes soient remplies (cf. Prop.-Déf^{tn} I.2.3.) :
$$\begin{cases} (T1) & (X, T, \mu) \text{ est ergodique;} \\ (T2) & h_\mu(X, T) < \infty; \\ (T3) & \text{le spectre discret de } (X, T, \mu) \text{ admet une infinité} \\ & \text{de valeurs propres rationnelles.} \end{cases}$$
Dans [DoLa2], nous montrons que ces conditions nécessaires sont suffisantes :

Théorème III.1.4. *Pour qu'un flot mesuré (X, T, μ) soit métriquement isomorphe à un flot de Toeplitz strictement ergodique, il faut et il suffit que les trois conditions $(T1 - 3)$ énoncées précédemment soient satisfaites.*

Avant de montrer pourquoi ce théorème est une conséquence de résultats plus généraux concernant les extensions quasi-automorphes de type Furstenberg-Weiss, nous exposons dans le sous-chapitre suivant quelques résultats qui ont précédé la caractérisation métrique.

§ III.2 : un petit tour d'horizon des résultats avant la caractérisation métrique.

Les aspects topologiques.

Dans [Fu1] et [Ox] on trouve des exemples de flots de Toeplitz qui ne sont pas uniquement ergodiques.

Dans [MaPa] il est montré que les suites de Toeplitz dont le flot associé est d'entropie topologique positive et non uniquement ergodique est topologiquement résiduel, dans la topologie induite par Ω sur son sous-ensemble de suites de Toeplitz.

Dans [Wi], outre la construction du facteur équicontinu maximal, on trouve celle de flots de Toeplitz admettant un nombre prescrit de mesures ergodiques invariantes, et une entropie topologique arbitrairement proche de $\log 2$.

Dans [Do1] on trouve la construction d'un flot de Toeplitz sur un alphabet à deux lettres admettant un simplexe de Choquet de mesures invariantes prescrit.

Dans [Do2] se trouve un exemple d'un tel flot dont l'ensemble des mesures invariantes ergodiques (les points extrêmaux du convexe compact $M_S(\bar{O}(\eta))$) n'est pas compact.

Dans [Ko] on trouve la construction de flots de Toeplitz d'entropie topologique nulle et dont la fonction complexité faible (cf. Prop.-Déf^{tn} I.1.10.) a un comportement asymptotique prescrit (sous-exponentiel).

Nous décrirons simplement les résultats topologiques de [JaKe], [Ne], [DoKwLa], [Do3] et [IwLa].

La suite de Toeplitz η est dite *régulière* si (la limite suivante existe toujours et appartient à $]0,1]$)

$$d(\eta) = \lim_t \text{Card } \{0 \le n < p_t : n \in Per_{p_t}(\eta)\}/p_t = 1.$$

Dans [JaKe] et [Ne] se trouve le résultat suivant :

Proposition III.2.1. *Si η est régulière, alors le flot $(\bar{O}(\eta), S)$ est strictement ergodique. Muni de sa seule mesure invariante, ce flot est métriquement isomorphe à son facteur équicontinu maximal (G_p, τ, m_p).*

Étant données η une suite de Toeplitz et $\mathbf{p}$ une de ses structures de périodes, nous appelons un *t-symbol* de η tout mot de longueur p_t lu en positions multiples de p_t, et noterons $W_t(\eta)$ leur ensemble. Autrement dit,

$$W_t(\eta) = \{\eta[kp_t, (k+1)p_t[: k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dans [IwLa], nous montrons que

$$h_{top}(\bar{O}(\eta), S) = \lim_t \frac{\text{Card } W_t(\eta)}{p_t} \le (1 - d(\eta)) \log \text{Card } \Sigma.$$

Le *centralisateur topologique* $\mathbf{C_{top}(S)}$ de $(\bar{O}(\eta), S)$ est l'ensemble des applications continues de $\bar{O}(\eta)$ dans lui-même qui commutent avec le shift S.

Le flot est dit *topologiquement coalescent* si tous les éléments de son centralisateur topologique sont des homéomorphismes.

Dans [BuKw1] certains exemples de flots de Toeplitz topologiquement coalescents et dont le centralisateur topologique est un groupe prescrit sont construits.

Le résultat suivant regroupe les résultats de [BuKw2], [DoKwLa] et [Do3] :

Théorème III.2.2. *Soient $(\bar{O}(\eta), S)$ et $(\bar{O}(\beta), S)$ deux flots de Toeplitz.*

Pour qu'il existe un facteur $\pi : (\bar{O}(\eta), S) \to (\bar{O}(\beta), S)$ il faut et il suffit qu'il existe une période de structure $\mathbf{p}$ commune à η et $\gamma \in \bar{O}(\beta)$, avec γ Toeplitz, et qu'il existe un $t \ge 1$ et une application surjective

$$f_t : W_t(\eta) \to W_t(\gamma)$$

telle que quel que soit $k \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma[kp_t, (k+1)p_t[= f_t(\eta[kp_t, (k+1)p_t[).$$

Alors quel que soit $\omega \in \bar{O}(\eta)$, *et* $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\pi(\omega)[-g_t(\omega) + kp_t, -g_t(\omega) + (k+1)p_t[\\ = f_t(\omega[-g_t(\omega) + kp_t, -g_t(\omega) + (k+1)p_t[),\end{aligned}$$

et $\pi_\eta(\omega) = \pi_\gamma(\pi(\omega))$ *(facteurs équicontinus maximaux).*

Pour que π *soit un isomorphisme il faut et il suffit que pour un* t *une telle* f_t *existe et soit bijective.*

Soient $h > 0$ *et* $(G_{\mathbf{p}}, \tau)$ *donnés.*

Il existe une famille non dénombrable $\{\eta_\alpha : \alpha \in \Upsilon\}$ *de flots de Toeplitz strictement ergodiques sur l'alphabet* $\{1, 2, \ldots, [e^h] + 1\}$ *qui ont tous en commun une entropie topologique égale à* h*, un facteur équicontinu maximal égal à* $(G_{\mathbf{p}}, \tau)$*, mais qui deux à deux ne sont jamais topologiquement isomorphes. De plus leurs centralisateurs topologiques sont triviaux (i.e.* $C_{top}(S) = \{S^n : n \in \mathbb{Z}\}$*).*

Il existe un flot de Toeplitz régulier qui ne soit pas topologiquement coalescent.

Soit η notre suite de Toeplitz "générique".

Soient $s > 0$ et $t \geq 0$ des entiers.

Posons, pour $W \in W_t(\eta)$ et $W' \in W_{t+s}(\eta)$,

$$Fr(W, W') = \frac{p_t}{p_{t+s}} \text{Card } \{0 \leq u < p_{t+s}/p_t : W'[up_t, (u+1)p_t[= W\}.$$

Dans [IwLa] nous obtenons :

Proposition III.2.3. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le flot* $(\bar{O}(\eta), S)$ *soit strictement ergodique est que quels que soient* $t \geq 0$ *et* $W \in W_t(\eta)$*, il existe* $\nu(W)$ *tel qu'uniformément en* $W' \in W_{t+s}(\eta)$*,*

$$\lim_{s \to \infty} Fr(W, W') = \nu(W).$$

Les aspects spectraux.

Nous renvoyons aux Prop.-Déf^{tns} I.2.8. et I.2.12. concernant le spectre et les approximations cycliques.

Dans [DoIw] est prouvée l'existence de flots de Toeplitz strictement ergodiques, non réguliers, et ayant un spectre purement discret.

Dans [IwLa] nous construisons des flots de Toeplitz strictement ergodiques non réguliers, et admettant des approximations cycliques de vitesse arbitraire.

En particulier les flots construits peuvent être à spectre partiellement continu et de rang 1 (cf. Prop.-Déf^{tn} I.2.10.).

Nous y faisons aussi la remarque, élémentaire, que la régularité $d(\eta)$ d'une suite de Toeplitz n'est pas un invariant topologique.

Nous y posons la question de l'existence de flots de Toeplitz admettant *une valeur propre irrationnelle*, ainsi que celle de l'existence d'un tel flot qui soit non régulier et pourtant de spectre discret pur et rationnel.

Dans [Iw], A. Iwanik répond de façon non constructive à ces questions :

Proposition III.2.4. *Il existe une famille non dénombrable de flots de Toeplitz strictement ergodiques, de spectre discret pur, tous de même facteur équicontinu maximal, et deux à deux non métriquement isomorphes.*

Donc il existe un flot de Toeplitz strictement ergodique de spectre purement discret, admettant une valeur propre irrationnelle.

Il existe aussi un flot de Toeplitz strictement ergodique de spectre purement discret rationnel, non régulier (mais métriquement isomorphe à un flot de Toeplitz régulier).

Dans [DoLa1], nous rendons les résultats d'A. Iwanik effectifs :

Proposition III.2.5. *Soit σ_0 un sous-groupe dénombrable de $\{|z|=1\}$, et qui contienne une infinité de racines de l'unité.*

Alors, par cohomologie (cf. [CoFoSi]*), il est possible de construire explicitement un flot de Toeplitz strictement ergodique, sur un alphabet à deux lettres, qui soit à spectre discret pur, et dont le groupe des valeurs propres soit égal à σ_0.*

§ III.3 : les extensions quasi-automorphes de type Furstenberg-Weiss.

Nous donnons ici un exposé des résultats intermédiaires utilisés dans [DoLa2], et qui ont permis d'obtenir le Théorème III.1.4. comme corollaire de résultats plus généraux. Toutefois il existe une preuve simple du Théorème III.1.4., que nous présentons d'abord.

Soit (X,T,μ) un système ergodique non périodique, d'entropie métrique finie, et admettant une infinité de valeurs propres rationnelles. Nous pouvons écrire les deux facteurs suivants :

$$(X,T,\mu)\xrightarrow{\phi}(G_p,\tau,m_p)\xrightarrow{Id}(G_p,\tau,m_p),$$

où G_p est une machine à additionner adéquate. Nous appliquons la version relative du Théorème de Jewett-Krieger, dûe à B. Weiss [We], pour obtenir une première réduction du problème :

Lemme III.3.1. *Il existe deux sous-shifts strictements ergodiques (X_1,S) et (Z,S), tels que si ν_{X_1} désigne la seule mesure invariante de (X_1,S), et ν_Z celle de (Z,S), il existe deux isomorphismes métriques $\theta_1:(X,T,\mu)\to(X_1,S,\nu_{X_1})$ et $\gamma_1:(G_p,\tau,m_p)\to(Z,S,\nu_Z)$, et il existe deux facteurs topologiques $\phi_1:(Y,S)\to(Z,S)$ et $\phi_2:(Z,S)\to(G_p,\tau)$, tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc}
(X,T,\mu) & \xrightarrow{\theta_1} & (X_1,S,\nu_{X_1}) \\
\phi\downarrow & & \downarrow\phi_1 \\
(G_p,\tau,m_p) & \xrightarrow{\gamma_1} & (Z,S,\nu_Z) \\
Id\downarrow & & \downarrow\phi_2 \\
(G_p,\tau,m_p) & \xrightarrow{Id} & (G_p,\tau,m_p)
\end{array}$$

En particulier, ϕ_2 est un facteur quasi-automorphe.

La seconde réduction résulte d'un théorème de Furstenberg et Weiss [FuWe] :

Lemme III.3.2. *Il existe un flot strictement ergodique (X_2,T), un facteur quasi-automorphe ϕ_3 : $(X_2,T)\to(Z,S)$, deux boréliens invariants de mesures pleines $X_1'\subset X_1$ et $X_2'\subset X_2$, et une bijection borélienne $\theta_2:X_1'\to X_2'$, tels que*

$$\theta_2\circ S=T\circ\theta_2 \text{ et } \phi_1=\phi_3\circ\theta_2 \text{ sur } X_1'.$$

Mais nous ne savons pas pour l'instant si (X_1,T) est symbolique. La dernière réduction consiste à appliquer un résultat de M. Denker et M. Keane [DeKe] :

Lemme III.3.3. *Il existe un sous-shift strictement ergodique (X_3,S), deux boréliens de mesures pleines et invariants $\tilde{X}_2\subset X_2$ et $\tilde{X}_3\subset X_3$, il existe un homéomorphisme $\theta_3:\tilde{X}_2\to\tilde{X}_3$, tels que*

$$\theta_3\circ T=S\circ\theta_3.$$

Soit X_4 un sous-ensemble minimal S-invariant de

$$\overline{\{(x,z):\phi_3(\theta_3^{-1}(x))=z:x\in\tilde{X}_3\}}.$$

Alors (X_4, S) est un sous-shift de $(X_3 \times Z, S \times S)$, strictement ergodique, et si $\pi_2(x, z) = z$, $\pi_2 : (X_4, S) \to (Z, S)$ est un facteur topologique. Soit ν_{X_4} la seule mesure invariante de (X_4, S). Alors $\theta_4 : \tilde{X}_3 \to X_4$ définie par $\theta_4(x) = (x, \phi_3(\theta_3^{-1}(x))$, réalise un isomorphisme métrique entre (X_3, S, ν_{X_3}) et (X_4, S, ν_{X_4}).

La continuité de θ_3 et la quasi-automorphie de ϕ_3 entraînent que π_2 est quasi-automorphe. La minimalité des flots montre que $\phi_2 \circ \pi_2$ est quasi-automorphe, et donc par la caractérisation topologique (Théorème III.1.3.), (X_4, S) est un flot de Toeplitz strictement ergodique.

Et finalement, $\theta = \theta_4 \circ \theta_3 \circ \theta_2 \circ \theta_1$ réalise un isomorphisme métrique entre (X, T, μ) et (X_4, S, ν_{X_4}). ■

L'argument précédent ne nous est apparu qu'après que nous ayons dans une version préliminaire de [DoLa2] obtenu le Théorème III.1.4., J. Kwiatkowski nous ayant par la suite indiqué la référence [FuWe], et E. Glasner [DeKe].

Nous avons dans [DoLa2] développé une méthode originale, qui se révèle maintenant capable de préciser et de généraliser le théorème de [FuWe]. Nous la présentons donc aussi pour son propre intérêt.

Voici le théorème de Furstenberg et Weiss :

Théorème III.3.4. *Soit $\psi : (X, T) \to (Z, T)$ un facteur topologique, et supposons que (X, T) soit transitif et que (Z, T) soit minimal non périodique.*

Alors il existe un flot minimal (X_1, T), une extension quasi-automorphe $\pi : (X_1, T) \to (Z, T)$, il existe un borélien invariant $X' \subset X$ de mesure invariante toujours pleine, et une injection borélienne $\theta : X' \to X_1$, telle que $\theta \circ T = T \circ \theta$, et que

$$\psi = \pi \circ \theta.$$

Si (X, T) est strictement ergodique, (X_1, T) l'est aussi.

Nous dirons que deux flots (X, T) et (X_1, T) sont *Borel⋆ isomorphes* si :
– il existe deux boréliens invariants $X' \subset X$ et $X'_1 \subset X_1$;
– quelle que soit $\mu \in M_T(X)$ (respectivement $\mu_1 \in M_T(X_1)$), $\mu(X') = 1$ (respectivement $\mu_1(X'_1) = 1$);
– il existe une bijection borélienne $\theta : X' \to X'_1$ telle que $\theta \circ T = T \circ \theta$, et telle que la bijection affine adjacente $\theta^\star$,

$$\theta^\star : M_T(X) \to M_T(X_1),$$

soit un homéomorphisme pour l'$\star$-faible topologie (alors en particulier $h_{top}(X, T) = h_{top}(X_1, T)$ d'après le principe variationnel (cf. Théorème I.2.5.)).

Nous renforçons le théorème de [FuWe] sous les deux formes suivantes :

Théorème III.3.5. *Soit $\psi : (X, T) \to (Z, S)$ un facteur topologique, et supposons que (Z, S) soit un sous-shift minimal non périodique (l'alphabet est le compact $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ si l'entropie topologique est infinie).*

Alors (X, T) est Borel⋆ isomorphe à un flot minimal (X_1, T) (disons par θ), et il existe une extension quasi-automorphe $\pi_s : (X_1, T) \to (Z, S)$, telle que

$$\psi = \pi_s \circ \theta.$$

Si (X, T) est symbolique, (X_1, T) aussi.

Théorème III.3.6. *Soit $\psi : (X, T) \to (Z, T)$ un facteur topologique entre flots d'entropie topologique quelconque, et supposons que (Y, T) soit strictement ergodique non périodique.*

Alors (X, T) est Borel⋆ isomorphe à un flot minimal (X_1, T) (disons par θ), et il existe une extension quasi-automorphe $\pi_s : (X_1, T) \to (Z, T)$, telle que

$$\psi = \pi_s \circ \theta.$$

Si (X, T) est symbolique, (X_1, T) aussi.

Nous pourrions tout regrouper en un seul énoncé si nous savions que tout flot minimal admet comme extension quasi-automorphe un sous-shift minimal qui lui soit Borel⋆ isomorphe. Mais pour l'instant nous n'en savons rien.

§IV : coexistence d'invariants métriques et/ou spectraux

Ce chapitre est destiné à présenter les résultats de [KwLa1,2], où sont construits des systèmes ergodiques de rang donné et de multiplicité ou d'ordre du groupe quotient donné.

Nous renvoyons le lecteur aux Prop.-Déf^{tns} I.2.8-11 et I.2.13., concernant la multiplicité spectrale, les tours de Rohlin, le rang, et le centralisateur métrique.

ll n'est pas facile d'exposer de façon synthétique nos résultats, dans la mesure où il s'agit de la construction explicite de systèmes ayant des propriétés métriques ou spectrales prescrites.

C'est pourquoi nous avons choisi de présenter les arguments généraux utilisés, et seulement les systèmes réalisant les couples $(2,3)$. En particulier, les minorations du rang ne seront qu'évoquées.

Voici l'énumération des (sous-)sous-chapitres à suivre :
– le nombre de recouvrement et les théorèmes de limitation;
– un exemple : les couples $(2,3)$, dont;
- les extensions de groupe et les r-cocycles de Morse;
- les versions symboliques de r, $F^\star$, o, et les exemples pour les couples $(2,3)$;
- le contrôle du rang;
- les centralisateurs et le contrôle de o : le couple $(o,r)=(2,3)$;
- le contrôle de la multiplicité spectrale : le couple $(m,r)=(2,3)$.

§ IV.1 : le nombre de recouvrement, le mélange, et les théorèmes de limitation.

Étant données deux partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ mesurables finies d'un espace de Lebesgue (X,μ) (cf. Prop.-Déf^{tn} I.2.1.), de même ensemble d'indexation, on note

$$|\mathcal{P}-\mathcal{P}'| = \min_{\sigma\ permutation} \sum_i \mu(P_i \triangle P'_{\sigma(i)}).$$

Une définition affaiblie du *rang fini* a été introduite par J.-P. Thouvenot et [Ki2], [Fe1] : il s'agit de la notion de *rang* 1 *local*, liée à celle du *nombre de recouvrement*, dont les définitions suivent :

Définition IV.1.1. *Un système (X,T,μ) est localement de rang 1 si il existe $a>0$ tel que quelle que soit la partition mesurable $\mathcal{P}$ de X, et $\varepsilon>0$, il existe deux sous-ensembles mesurables F et A de X, un entier positif h, et une partition mesurable $\mathcal{P}'$ de A tels que*

$$\begin{cases} (i) & (F,TF,\dots,T^{h-1}F) \text{ sont disjoints deux à deux;}\\ (ii) & A=\cup_{0\le j<h}T^jF;\\ (iii) & \mu(A)>a;\\ (iv) & |\mathcal{P}'-\mathcal{P}_{|A}|<\varepsilon\ \ (\mathcal{P}_{|A}=\{P\cap A:\mu(P\cap A)>0, P\in\mathcal{P}\});\\ (v) & \mathcal{P}' \text{ est raffinée par } \{T^jF: 0\le j<h\}.\end{cases}$$

Le plus grand des $a>0$ dans la définition qui précède s'appelle le nombre de recouvrement de (X,T,μ), et est noté $F^\star(T)$. Si un tel $a>0$ n'existe pas on pose $F^\star(T)=0$.

Rappelons qu'un système (X,T,μ) est *mélangeant* si quels que soient A et B mesurables,

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A\cap T^nB)=\mu(A)\mu(B).$$

Soit $0\le\alpha\le1$. Le système (X,T,μ) sera dit *α-mélangeant* si quels que soient A,B mesurables,

$$\liminf_n \mu(A\cap T^{-n}B)\ge\alpha\mu(A)\mu(B).$$

On note $mix(T)$ le supremum des α tels que T soit α-mélangeant. Alors T est $mix(T)$-mélangeant.

Les théorèmes de limitation.

Dans [Ch2] et [Ki1,2] les relations suivantes entre le rang, la multiplicité, et le nombre de recouvrement, sont démontrées :

Théorème IV.1.2. *Soit (X, T, μ) un système ergodique. Alors*

$$m(T) \leq \frac{1}{F^\star(T)} \leq r(T).$$

Théorème IV.1.3. *Soit (X, T, μ) un système mesuré.*

Alors s'il est de rang 1, il est ergodique et $C(T) = Wcl(T)$, donc $o(T) = 1$ ("Weak closure theorem").

S'il est mélangeant, $Wcl(T) = \{T^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Supposons que (X, T, μ) soit de rang fini. Alors l'ordre du groupe quotient dans le centralisateur $o(T)$ et le nombre de recouvrement $F^\star(T)$ sont liés par la relation suivante :

$$o(T) \leq \frac{1}{F^\star(T) + mix(T) - 1}.$$

En particulier, si T est mélangeante, $o(T) \leq r(T)$.

Les deux théorèmes précédents montrent que certaines valeurs d'invariants métriques et/ou spectraux peuvent ne pas être compatibles.

Il est naturel de se poser la question de savoir si en tant que limitations générales, ce sont les seules.

Les couples ordre du groupe quotient et rang.

Concernant la construction de systèmes ergodiques réalisant un couple donné (o, r), citons d'abord ce qui provient de [BuKwSi] et [FiKw] :

Théorème IV.1.4. *La différence $o - r$ peut être arbitrairement grande, positive ou négative.*

Étant donné r et o premier plus grand que r, il existe un système ergodique réalisant le couple (o, r).

Dans [KwLa1], nous complétons le théorème précédent en montrant que le "weak closure theorem" de J. King constitue bien la seule limitation globale possible pour les couples (o, r) :

Théorème IV.1.5. *Pour tout couple $(o, r) \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})^2$ tel que $r \geq 2$, $o \geq 1$, et $(o, r) \neq (\infty, \infty)$, il existe un système ergodique (X, T, μ) tel que $o(T) = o$ et $r(T) = r$, qui de plus est tel que $Wcl(T)$ est non dénombrable.*

Remarque IV.1.6. *Nous renvoyons aux paragraphes suivants et à la* Remarque IV.2.1.4. *pour les extensions de groupe, et les cocycles de Morse faiblement mélangeants. Soit $p \geq 2$ un entier.*

Pour obtenir le couple $(o, r) = (\infty, \infty)$, il suffit de considérer une extension de groupe faiblement mélangeante par un cocycle de Morse $(X \times G, T_\phi, \mu \otimes m_G)$ de la "staircase transformation" (X, T, μ) de [Ad]*, où G est le groupe des entiers $\mathbf{p} = (p^t)$-adiques* HeRo].

En effet, comme (X, T, μ) est de rang 1 mélangeant [Ad]*, et que ϕ est faiblement mélangeant, T_ϕ est mélangeante* [Rud1].

Le système $(X \times G, T_\phi, \mu \otimes m_G)$ admet, pour chaque t, un facteur naturel associé à l'épimorphisme $q_t : G \to \mathbb{Z}_{p^t}$. Le facteur correspondant est alors mélangeant, et donc nécessairement de rang p^t [Ki3].

Donc $(X \times G, T_\phi, \mu \otimes m_G)$ est de rang infini.

Aussi puisque T_ϕ est mélangeant, $Wcl(T_\phi) = \{T_\phi^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Mais comme le système de rang 1 de base est un facteur canonique [LeMe], [New2]*, quel que soit $g \in G$ non nul, si $\sigma_g \in C(T_\phi)$ est défini par $\sigma_g(x, h) = (x, g + h)$, σ_g ne peut appartenir à $Wcl(T_\phi)$.*

Il s'ensuit que $o(T_\phi) = \infty$.

Les couples multiplicité et rang : chronologie et résultats.

Nous avons vu que pour tout système ergodique $m(T) \leq r(T)$.

Dans [Me2] M. Mentzen conjecture que pour tout couple d'entiers (m,r) tels que $m \leq r$, il existe un système ergodique (X,T,μ) tel que
$$(m,r) = (m(T), r(T)).$$

Le couple $(1,1)$ a été obtenu dans [Ch1];
le couple $(1,2)$ dans [dJ];
le couple $(1,r)$ dans [Me2];
le couple $(2,r)$ dans [GoLe];
le couple (r,r) dans [Rob1,2];
le couple $(r,2r)$ dans [Me1];
le couple $(p-1,p)$ pour p premier dans [FeKw];
le couple $(1,\infty)$ dans [LeSi] et [Fe1].
Les systèmes Gaussiens-Kronecker [CoFoSi] réalisent toujours le couple $(1,\infty)$ [dlR].
Dans [FeKwMa] il est prouvé qu'étant donné m, l'ensemble des r tels que le couple (m,r) soit réalisé a une densité asymptotique égale à 1.
Notons que tout système ergodique d'entropie positive réalise le couple (∞,∞).
Dans [KwLa2] nous résolvons la conjecture de M. Mentzen.
Nos systèmes sont construits avec des cocycles de Morse, et synthétisent les différentes propriétés des exemples apparaissant dans la suite d'articles précités.
Dans [Kw] J. Kwiatkowski obtient les couples restants, à savoir (m,∞), utilisant des limites inverses [CoFoSi] de systèmes similaires à ceux de [KwLa2].

Théorème IV.1.7. *Quel que soit le couple (m,r) d'entiers tels que $m \leq r$, avec m ou $r=\infty$ éventuellement, il existe un système ergodique (X,T,μ) tel que $m(T)=m$ et $r(T)=r$.*

§ IV.2 : un exemple : les couples $(2,3)$.

Nous commençons par décrire ce que les exemples de [KwLa1,2] ont de commun.

§ IV.2.1 : les extensions de groupe et les r-cocycles de Morse.

Nous dirons que le système ergodique (X,T,μ) est une *machine à additionner* si il a un spectre discret pur rationnel (cf. § III.).
Nous pouvons décrire un tel T, génériquement, de la façon suivante :
il existe $\mathbf{p}=(p_t)_{t\geq 0}$ une suite d'entiers, $p_t \geq 2$, telle que
p_t divise strictement p_{t+1}, et
il existe une suite $(\xi_t)_{t\geq 0}$ de tours de Rohlin, telle que
$$\begin{cases} \xi_t = \{D_0^t, \dots, D_{p_t-1}^t\}; \\ X = \cup_{i=0}^{p_t-1} D_i^t; \\ \mu(D_i^t) = 1/p_t; \\ TD_{p_t-1}^t = D_0^t. \end{cases}$$

Métriquement cette machine est isomorphe au groupe des entiers $\mathbf{p}$-adiques [HeRo], muni de sa mesure de Haar et de la rotation par un générateur topologique.
Une telle machine est de rang 1, et vérifie donc $C(T) = Wcl(T)$.

Soient G un *groupe abélien fini*, m_G l'équiprobabilité sur G, et $\phi : X \to G$ une application mesurable.
Nous appelons ϕ un *cocycle.*
Ce cocycle détermine une *extension de groupe* $(X\times G, T_\phi, \mu\otimes m_G)$, où T_ϕ est définie par
$$T_\phi(x,g) = (Tx, g+\phi(x)).$$

Il est aisé de calculer que $T_\phi^n(x,g) = (T^n x, g+\phi^{(n)}(x))$, où
$$\phi^{(n)}(x) = \begin{cases} \phi(x)+\ldots+\phi(T^{n-1}x) \text{ si } n>0; \\ 0 \ (=0_G) \text{ si } n=0; \\ -(\phi(T^n x)+\ldots+\phi(T^{-1}x)) \text{ si } n<0. \end{cases}$$

Soient H_0 un sous-groupe de G, $H = G/H_0$ le groupe quotient, $p_H : X \to H$ l'application quotient, et m_H l'équiprobabilité sur H.

Alors le *facteur naturel de* $(X \times G, T_\phi, \mu \otimes m_G)$ *déterminé par* H_0 est le facteur $\pi_H = Id_X \times p_H : X \times G \to X \times H$, le système "facteur" étant $(X \times H, T_{\phi_H}, \mu \otimes m_H)$, où

$$\phi_H = p_H \circ \phi.$$

Le facteur naturel est une extension de groupe de (X, T, μ) à son tour (les facteurs naturels ne sont utilisés que dans [KwLa2]).

Nous utiliserons des cocycles plus particuliers encore :

Définition IV.2.1.1. *Soit $r \geq 1$ un entier et supposons que $\mathbf{p} = (p_t)$ soit telle que r divise chaque p_t.*

Soit alors λ_t tel que $p_t = r\lambda_t$.

Nous dirons que le cocycle $\phi : X \to G$ est un r-cocycle de Morse si ϕ est constant sur D_i^t dès que $i \notin \{j\lambda_t - 1 : 0 < j \leq r\}$, ce quel que soit $t \geq 0$.

Lorsque $r = 1$, nous appelons ϕ un cocycle de Morse.

Remarquons que si ϕ est un cocycle de Morse, ϕ_H en est un aussi.

Une extension de groupe n'est pas toujours ergodique.

Nous dirons que l'extension de groupe T_ϕ *est continue* (ou *faiblement mélangeante*) si toute fonction propre de U_{T_ϕ} en est une de U_T.

Les critères suivants sont dûs à W. Parry [Pa1] :

Théorème IV.2.1.2. *L'extension de groupe T_ϕ est ergodique si et seulement si quel que soit γ un caractère non trivial de G, l'équation*

$$\frac{f(Tx)}{f(x)} = \gamma(\phi(x))$$

n'a pas de solution mesurable $f : X \to \{|z| = 1\}$.

Et T_ϕ est continue si et seulement si quels que soient ζ de module 1 et γ un caractère non trivial, il n'existe pas de fonction mesurable $f : X \to \{|z| = 1\}$ telle que presque sûrement,

$$\frac{f(Tx)}{f(x)} = \zeta\gamma(\phi(x)).$$

Sous-shift bilatéral engendré strictement ergodique.

Nous renvoyons le lecteur aux Prop.-Déf^{tns} I.1.9-10. au sujet des sous-shifts.

Soit $\Sigma = G$ *un groupe abélien fini* (l'alphabet est donc un groupe).

Nous notons les mots ou blocs sur G de la façon suivante :

$$B = B[0]B[1]\dots B[n-1],$$

et $|B| = n$ est la *longueur* de B.

Si $0 \leq i < j \leq |B|$, on pose

$$B[i, j[= B[i]B[i+1]\dots B[j-1].$$

Si C est un autre bloc, nous notons

$$fr(B, C) = \frac{1}{|C|}\text{Card } \{0 \leq i < |C| - |B| - 1 : C[i, i + |B|[= B\}.$$

Soient $\omega \in G^{\mathbb{N}}$, et $\square \notin G$ une "lettre" supplémentaire.

Notons $\omega^\square$ l'élément de $(G \cup \{\square\})^{\mathbb{Z}}$ tel que si $i \in \mathbb{N}$, $\omega_i^\square = \omega_i$ et si $i < 0$, $\omega_i^\square = \square$.

Posons

$$\Omega_\omega = \{\gamma \in G^{\mathbb{Z}} : \exists (n_i) \to +\infty : S^{n_i}\omega^{\square} \to \gamma\}.$$

C'est le *sous-shift bilatéral engendré par* ω.

Si pour chaque B,

1) $fr(B,\omega)$ existe, et
2) $\{i \geq 0 : \omega[i, i+|B|[= B\}$ est à lacunes bornées ou vide,

le flot (Ω_ω, S) est *strictement ergodique*, de mesure invariante μ_ω définie par (cf. Prop.-Déf^{tn} I.2.7.) $([B]_k = \{\eta \in \Omega_\omega : \eta[k, k+|B|[= B\})$

$$\mu_\omega([B]_k) = fr(B,\omega).$$

Nous dirons alors que ω *est strictement ergodique.*

Versions symboliques des r-cocycles de Morse.

Si B et C sont deux blocs, BC est le *concaténé* des blocs B et C.

Pour $q \in \mathbb{N}$, on note $B^q = B \dots B$ (q fois, $|B^q| = q|B|$).

Si τ_g est une translation par un élément $g \in G$ on note $\tau_g(B)$ le bloc de même longueur tel que $\tau_g(B)[i] = B[i] + g,\ 0 \leq i < |B|$.

Si $r \geq 1$ et $B = B_0 \dots B_{r-1}$ est un mot de longueur rn, où chaque B_i est de longueur n, si C est un bloc de longueur rm, alors le mot $B \overset{r}{\times} C$ de longueur rmn est défini par

$$B \overset{r}{\times} C =$$

$$\tau_{C[0]}(B_0)\dots\tau_{C[r-1]}(B_{r-1})\tau_{C[r]}(B_0)\dots\tau_{C[2r-1]}(B_{r-1})\dots$$
$$\dots\dots\tau_{C[r(m-1)]}(B_0)\dots\tau_{C[rm-1]}(B_{r-1}).$$

Lorsque $r = 1$, on note $B \times C$ au lieu de $B \overset{r}{\times} C$.

Soit $(b_t)_{t\geq 0}$ une suite de mots sur G telle que

$$\begin{cases} (i) & |b_t| = rm_t,\quad m_t \geq 2; \\ (ii) & b_t[0, r[= 0^r; \\ (iii) & b_t = b_t(0)\dots b_t(r-1),\quad \text{avec } |b_t(i)| = m_t,\ 0 \leq i < r. \end{cases}$$

Nous en déduisons la suite de mots $(B_t)_{t\geq 0}$ définie inductivement par

$$B_0 = b_0 \text{ et } B_{t+1} = B_t \overset{r}{\times} b_{t+1}.$$

Alors $|B_t| = r\lambda_t = p_t = rm_0 \dots m_t$, et $B_{t+1}[0, p_t[= B_t$.

Soit $\mathbf{p} = (p_t)_{t\geq 0}$ et (X, T, μ) la machine à additionner correspondante.

Définissons alors le cocycle $\phi : X \to G$ par

$$\phi(x) = B_t[i+1] - B_t[i]$$

si $x \in D_i^t$ avec i différent de $j\lambda_t - 1$, $j = 1, \dots, r$.

Puis définissons $\omega((b_t)) \in G^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\omega((b_t))[0, p_t[= B_t,\ \text{quel que soit } t \geq 0.$$

Introduisons une notation supplémentaire : soit $p : G \to H$ un épimorphisme.

Soit B un bloc sur G.

Nous noterons $p(B)$ le bloc de même longueur défini par $p(B)[i] = p(B[i])$, $0 \leq i < |B|$.

La proposition suivante donne un critère simple de stricte ergodicité de $\omega((b_t))$ ainsi que la possibilité d'étudier l'extension de groupe T_ϕ sous la forme d'un sous-shift strictement ergodique.

Elle montre aussi comment obtenir la version symbolique du cocycle de Morse déterminé par un facteur naturel.

Proposition IV.2.1.3. *Tout r-cocycle de Morse s'obtient par une construction par blocs similaire à celle décrite ci-dessus.*

Si T_ϕ est ergodique, (Ω_ω, S) est strictement ergodique, et alors les systèmes $(\Omega_\omega, S, \mu_\omega)$ et $(G_{\mathbf{p}} \times G, \tau_\phi, m \otimes m_G)$ sont métriquement isomorphes.

Si $r = 1$, la stricte ergodicité de l'un équivaut à l'ergodicité de l'autre [Le]. *Dans ce cas, si il existe $\rho > 0$ tel que quels que soient $t \geq 0$ et $g \in G$,*

$$fr(g, b_t) \geq \rho,$$

alors $\omega((b_t)) = \omega$ est strictement ergodique [Mar].

Si $(X \times G, T_\phi, \mu \otimes m_G)$ est ergodique, construit à partir de la suite de blocs $((b_t))$, et si $(X \times H, T_{\phi_H}, \mu \otimes m_H)$ en est un facteur naturel, alors ϕ_H est déterminé par la suite de blocs $(p_H(b_t))$.

Remarque IV.2.1.4. *Il est possible de définir les cocycles de Morse au-dessus des systèmes de rang 1 : ce sont les cocycles qui sont constants sur les étages de chaque tour, sauf le dernier, sur lequel le cocycle est inductivement défini le long de la suite de tours qui se raffinent.*

Ceci est utilisé dans [BuKwSi] *et* [KwLa2] *pour avoir des extensions de groupe mélangeantes ou faiblement mélangeantes.*

§IV.2.2 : les versions symboliques de r, $F^\star$, o, et les exemples pour les couples $(2,3)$.

Nous supposons ici que ϕ est un r-cocycle de Morse, déterminé par la suite de blocs $((b_t))$, et que $\omega((b_t))$ est strictement ergodique.

Les versions symboliques de r et $F^\star$.

Si B et C sont de même longueur, on pose

$$\bar{d}(B, C) = \frac{1}{|B|}\text{Card } \{0 \leq i < |B| : B[i] \neq C[i]\}.$$

La distance $\bar{d}$ est la *distance de Hamming.*

Soit $\mathcal{A}$ *une famille finie de blocs*, et B un bloc dont la longueur est la même que celle de certains des blocs de $\mathcal{A}$.

Alors notons

$$\bar{d}(B, \mathcal{A}) = \min\{\bar{d}(B, A) : A \in \mathcal{A}, |B| = |A|\}.$$

Posons, $\delta > 0$ étant donné, B étant un bloc quelconque,

$$t_\delta(\mathcal{A}, B) = \max\{\frac{|B_1| + \ldots + |B_p|}{|B|}\},$$

où le maximum est pris sur toutes les écritures de B de la forme

$$B = \epsilon_1 B_1 \epsilon_2 \ldots \epsilon_p B_p \epsilon_{p+1}$$

avec $\bar{d}(B_i, \mathcal{A}) < \delta$, $1 \leq i \leq p$, les ϵ_i étant des blocs de “remplissage”.

Étant donnée $\omega \in G^{\mathbb{N}}$ strictement ergodique, nous posons

$$t_\delta(\mathcal{A}, \omega) = \lim_{N \to +\infty} t_\delta(\mathcal{A}, \omega[0, N]).$$

La limite existe bien, et si $\mathcal{A}$ est constituée d'un seul mot A, nous la noterons $t_\delta(A, \omega)$.

Définition IV.2.2.1. *Le système $(\Omega_\omega, S, \mu_\omega)$ est de rang au plus r si quels que soient $\delta > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, il existe $\mathcal{A}$ de cardinal r telle que tous les mots de $\mathcal{A}$ soient de longueur au moins égale à N et que*

$$t_\delta(\mathcal{A}, \omega) \geq 1 - \delta.$$

Le nombre de recouvrement de $(\Omega_\omega, S, \mu_\omega)$, $F^\star(\omega)$, est au moins égal à $a > 0$ si quels que soient $\delta > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, il existe un mot A de longueur au moins égale à N tel que

$$t_\delta(A, \omega) \geq a.$$

L'exemple ordre du groupe quotient $o(T_\phi) = 2$ et rang $r(T_\phi) = 3$.

Voici G et les blocs $((b_t))$:

$$\begin{cases} G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ b_t = b_t(0)b_t(1)b_t(2), \\ b_t(i) = H_i^{x_i}, \;\; x_i = 2^{t-i+2}, \\ H_i = (F_i)(F_i \times 1) \quad \text{(concaténation)}, \\ F_0 = 0000000000100, \;\; F_1 = 000000000000000000010, \\ F_2 = \underbrace{000000000000000000000000000000000000000000000001}_{\text{longueur égale à } 48}. \end{cases}$$

On montre que le r-cocycle de Morse ϕ associé est faiblement mélangeant, en utilisant le critère du Théorème IV.2.1.2. itéré, et le fait que ϕ est constante sur "beaucoup" d'étages de ξ_t.

L'exemple multiplicité $m(T_{\phi_H}) = 2$ et rang $r(T_{\phi_H}) = 3$.

Dans [KwLa2] nous construisons d'abord une extension par un cocycle de Morse $(X \times G, T_\phi, \mu \otimes m_G)$ qui réalise le couple $(3, 3)$ (multiplicité égale au rang).

Ensuite nous en exhibons un facteur naturel qui réalise le couple $(2, 3)$.

Voici G, H_0 et H :

$$\begin{cases} G = (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^3; \\ H_0 = \{0\} \times \{0\} \times (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}), \;\; H = G/H_0. \end{cases}$$

Notons $e_i = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{i-1 \text{ fois}}, 1, 0, \ldots, 0)$, $1 \leq i \leq r$, les générateurs de G.

Si $h = (h_1, h_2, h_3)$ est un élément de G, on pose

$$v(h) = (h_3, h_1, h_2) \;\; \text{(un automorphisme de } G).$$

Alors on choisit les blocs "b_t" suivants :

$$\begin{cases} F_i = F_{t,i} = 0(e_i)(2e_i)\ldots((l_t - 1)e_i), \;\; \text{avec } 15|l_t \text{ et } l_t \to \infty, \;\; i = 1, 2, 3; \\ \beta_{t,1} = F_1 \times F_2 \times F_3, \;\; \beta_{t,2} = F_2 \times F_3 \times F_1, \;\; \beta_{t,3} = F_3 \times F_1 \times F_2; \\ \beta_t = \beta_{t,1}\beta_{t,2}\beta_{t,3}; \\ b_t = \beta_t^{q_t}, \;\; \text{avec } \sum_t 1/q_t < \infty. \end{cases}$$

On remarque que $v(F_{t,i}) = F_{t,i+1 \mod 3}$ et $v(\beta_{t,i}) = \beta_{t,i+1 \mod 3}$.

L'ergodicité de T_ϕ résulte de la Proposition IV.2.1.3..

On vérifie que le cocycle de Morse obtenu ϕ est faiblement mélangeant à l'aide de la Proposition IV.2.5.1. énoncée plus loin.

§ IV.2.3 : le contrôle du rang.

On pose pour les deux exemples $\omega_t = b_t \overset{r}{\times} b_{t+1} \overset{r}{\times} \ldots$. Nous n'exposerons ici que les arguments rudimentaires qui indiquent que le rang n'excède pas 3.

L'exemple $(o, r) = (2, 3)$**.**

Posons $L_k^{(s)}(t) = B_t \overset{r}{\times} \tau_k(b_{t+1}(s))$, avec $0 \leq s < 3$ et $k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Alors les blocs $L_0^{(s)}(t)$, $0 \leq s < 3$, recouvrent ω sauf un ensemble d'entiers dont la densité n'excède pas $64/m_{t+1}$, et donc $r(T_\phi) \leq 3$.

Pour montrer que $r(T_\phi) > 2$, nous renvoyons le lecteur à [KwLa1].

L'exemple $(m, r) = (2, 3)$**.**

Nous montrons d'abord que $r(T_\phi) \leq 3$.

Pour cela, soient $E_{t,i} = B_{t-1} \times \beta_{t,i}$, $i = 1, 2, 3$.

Alors si $l = l_{t-1}$, si $0 \leq u < l^r$, et $u = u_1 + u_2 l + u_3 l^2$ avec $0 \leq u_i < l$, on observe que

$$\beta_{t,i}[u] = v^{i-1}(\beta_{t,1}[u]) = v^{i-1}(u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3).$$

Si $g = (g_1, g_2, g_3) \in G$ et $u(g) = g_1 + g_2 l + g_3 l^2$, alors

$$\tau_g(\beta_{t,1})[u] = \beta_{t,1}[u + u(g)],$$

dès que $0 \leq u_i < l - 15$.

On en déduit que

$$\bar{d}(\tau_g(\beta_{t,i})[0, l^r - u(g)[, \beta_{t,i}[u(g), l^r - 1[) \leq 90/l = 90/l_{t-1} \to 0.$$

Et donc $\lim_t t_\delta(\{E_{t,i} : 1 \leq i \leq 3\}, \omega) = 0$, quel que soit $\delta > 0$. Donc $r(T_\phi) \leq 3$.

Il s'ensuit, puisque le rang d'un facteur n'excède pas celui de son extension, que $r(T_{\phi_H}) \leq 3$.

Pour montrer que $r(T_{\phi_H}) > 2$, nous prouvons que $F^\star(T_{\phi_H}) < 1/2$ (cf. [KwLa2]).

§ IV.2.4 : les centralisateurs et le contrôle de o **: le couple** $(o, r) = (2, 3)$**.**

Pour étudier $o(T_\phi)$, mais aussi $m(T_\phi)$, on cherche à décrire $C(T_\phi)$ en fonction de $C(T)$, si possible.

La notion de *facteur canonique* introduite par D. Newton [New2] s'est révélée fructueuse pour ces descriptions.

Le fait que T soit à spectre discret, conjugué aux travaux de Newton et de [LeLiTh], permet d'obtenir le résultat suivant :

Théorème-Définition IV.2.4.1. *Les éléments de $C(T)$ sont exactement les rotations sur le groupe des entiers* $\mathbf{p}$*-adiques.*

Supposons que $(X \times G, T_\phi, \mu \otimes m_G)$ soit ergodique.

Alors les éléments de $C(T_\phi)$ sont complètement décrits par les triplets (S, f, τ), où $S \in C(T)$, $f : X \to G$ est un cocycle, v est un endomorphisme du groupe G, qui vérifient μ-presque sûrement

$$f(Tx) - f(x) = \phi(Sx) - v(\phi(x)). \tag{IV}$$

L'élément $R \simeq (S, f, v)$ correspondant de $C(T_\phi)$ est déterminé par

$$R(x, g) = (Sx, v(g) + f(x)).$$

Soient $(R_n), R \in C(T_\phi)$, $R_n \approx (S_n, f_n, Id_G)$ et $R \approx (S, f, Id_G)$.

Alors $R_n \to R$ si et seulement si $S_n \to S$ et $f_n \to f$ en mesure.

Posons, pour $a \in G$,

$$\sigma_a(x,g) = (x, g+a).$$

Alors $\sigma_a \approx (Id_X, a, Id_G)$ et $T_\phi^{n_k} \to \sigma_a$ si et seulement si $T^{n_k} \to Id_X$ et $\phi^{(n_k)} \to a$ en mesure.

Application à l'exemple $(o,r) = (2,3)$.

Dans [KwLa1] on montre que

$$\begin{cases} C(T_\phi) = \{\sigma_g \circ \tilde{S} : \tilde{S} \in Wcl(T_\phi),\ g \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}, \\ \text{puis que si } g \neq 0,\ \sigma_g \notin Wcl(T_\phi). \end{cases}$$

Ceci utilise (IV) itérée, le fait que ϕ est constant sur "beaucoup" d'étages de la tour ξ_t, et que (ξ_t) converge vers la partition par points.

Par exemple, dans l'équation (IV), comme S doit être une rotation, f doit être constante sur "beaucoup" d'étages de ξ_t à son tour... .

Le fait que $Wcl(T_\phi)$ soit non dénombrable est dû au fait qu'un ensemble non dénombrable de $S \in C(T)$ apparaissent comme base de triplets (S, f, v) dans $Wcl(T_\phi)$. Ceci est basé sur [GoKwLeLi, Lemma 4].

L'obtention des couples (∞, r) ou (o, ∞) se fait avec des limites inverses de suites de systèmes réalisant les couples (o_n, r) ou (o, r_n) [CoFoSi].

Pour le couple (∞, ∞), nous renvoyons le lecteur à la Remarque IV.1.6..

§ **IV.2.5 : le contrôle de la multiplicité spectrale : le couple $(m,r) = (2,3)$.**

Dans [KwLa2] nous contrôlons la multiplicité spectrale de T_ϕ grâce à son centralisateur.

Rappelons que pour l'exemple "traité" ici, $G = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Notons $\hat{G}$ le groupe de caractères associés.

Pour $\gamma \in \hat{G}$, nous posons

$$L_\gamma = \{f \otimes \gamma : f \in L^2(\mu)\}.$$

Soit U_{T_ϕ} l'opérateur unitaire associé à T_ϕ.

Alors les sous-espaces L_γ sont U_{T_ϕ}-invariants, et

$$L^2(\mu \otimes m_G) = \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} L_\gamma.$$

Le résultat suivant utilise [Ke], [KwSi], [IwLa] et le lemme de Baxter [Bax]. Il permet de voire plus clair dans la structure de la fonction multiplicité spectrale de U_{T_ϕ} :

Proposition IV.2.5.1. *Une condition suffisante pour que ϕ soit faiblement mélangeant (ou continu) est que* Card *G divise p_{t+1}/p_t pour chaque t.*

Si γ est un caractère de G, chaque couple unitaire (L_γ, U_{T_ϕ}) a un spectre simple (L_γ est cyclique).

Notons μ_γ la mesure spectrale correspondante.

Si ϕ est continu, et γ est non trivial, alors μ_γ est continue.

Si ϕ est continu, et si γ et γ' sont deux caractères, alors μ_γ et $\mu_{\gamma'}$ sont soit équivalentes soit orthogonales.

Et donc l'image de la fonction multiplicité spectrale (les multiplicités spectrales) de T_ϕ est égale à l'ensemble des cardinaux des classes d'équivalence des mesures μ_γ, $\gamma \in \hat{G}$.

Comme il existe $v : G \to G$ tel que pour chaque $t \geq 0$,

$$b_t = \beta_{t,1} v(\beta_{t,1}) \dots v^{3q_t - 1}(\beta_{t,1}) \quad \text{(concaténation)}, \quad \text{et } \Sigma_{t \geq 0} 1/q_t < +\infty,$$

nous pouvons nous servir du critère d'équivalence suivant qui apparaît dans [FeKw] et [GoKwLeLi] :

Propostion IV.2.5.2. *Il existe $R = (S, f, v) \in C(T_\phi)$.*

Et quel que soit $\gamma \in \hat{G}$, U_R conjugue unitairement (L_γ, U_{T_ϕ}) et $(L_{\gamma\circ v}, U_{T_\phi})$.

Il s'ensuit que quel que soit $\gamma \in \hat{G}$,

$$\mu_\gamma \simeq \mu_{\gamma\circ v}.$$

Si nous choisissons γ d'ordre 15, alors $\{\gamma \circ v^u : u = 0, 1, 2\}$ est de cardinal 3, et il s'ensuit que

$$3 \leq m(T_\phi) \leq r(T_\phi) \leq 3.$$

Ainsi T_ϕ *réalise le couple* $(3, 3)$.

Pour l'étude de $m(T_{\phi_H})$, nous utilisons en partie une technique de [KwJLe].

Le facteur naturel $(X \times H, T_{\phi_H}, \mu \otimes m_H)$ est à nouveau une extension de groupe définie par un cocycle de Morse continu $\phi_H = p_H \circ \phi : X \to H$.

Donc les propriétés énoncées à la Proposition IV.2.5.1. persistent.

Notons pour $\gamma \in \hat{H}$,

$$L_{\gamma,H} = \{g \otimes \gamma : g \in L^2(\mu)\}.$$

Étant donné $\gamma \in \hat{H}$, notons $\tilde{\gamma} = \gamma \circ p_H$.

Alors puisque U_{π_H} conjugue unitairement $(L_{\tilde{\gamma}}, U_{T_\phi})$ et $(L_{\gamma,H}, U_{T_{\phi_H}})$, nous en déduisons que $\mu_\gamma \simeq \mu_{\tilde{\gamma}}$.

Remarquons également que si $\mu_{\tilde{\gamma}} \perp \mu_{\tilde{\gamma}'}$, alors $\mu_\gamma \perp \mu_{\gamma'}$.

Si $\beta \in \hat{G}$, posons $\Upsilon(\beta) = \{\delta \in \hat{G} : \mu_\beta \simeq \mu_\delta\}$.

Alors Card $\Upsilon(\beta) \leq 3$ car $m(T_\phi) = 3$.

Soient $\mathcal{O}_{\hat{v}}(\beta) = \{\beta \circ v^u : u = 0, 1, 2\}$, et

$$\mathcal{H}_0 = \{\beta \in \hat{G} : \beta_{|H_0} \equiv 1\}, \text{ l'annihilateur de } H_0.$$

Alors on aura $m(T_{\phi_H}) = \max_{\beta\in\hat{G}} \text{Card } (\mathcal{H}_0 \cap \Upsilon(\beta))$.

Pour conclure, on utilise le critère suivant de [GoKwLeLi] :

Proposition IV.5.2.3. *Supposons que $\delta \notin \mathcal{O}_{\hat{v}}(\beta)$. Posons $A_\delta = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r \hat{v}^i\delta$, et définissons analoguement A_β. Il existe $h \in G$ tel que $A_\delta(h) \neq A_\beta(h)$.*

De plus, si $\bar{h}(t) = h_1 + h_2 l_t + h_3 l_t^2$, $T^{\bar{h}(t)p_t} \to Id$ et

$$\lim_t \int_X \delta(\phi^{(\bar{h}(t)p_t)}(x))d\mu(x) = A_\delta(h) \neq A_\beta(h) = \lim_t \int_X \beta(\phi^{(\bar{h}(t)p_t)}(x))d\mu(x).$$

§V : bonnes chaînes de dimension infinie

Dans ce chapitre, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ désigne le tore, que nous identifions à $[0,1[$, et λ désigne la mesure de Lebesgue.

Étant donné x un réel, nous noterons $[x]$ sa partie entière, et $\langle x \rangle$ sa partie fractionnaire.

Nous nous intéressons aux problèmes liés à la *conjecture de forte uniforme distribution de Khinchin.* Chronologiquement ceux-ci ont reçu un développement parallèle à ceux dits des *sommes de Riemann.*

Nous avons choisi une présentation qui respecte ce parallèlisme, et scindé ce chapitre de la façon suivante :

– présentation des problèmes et aperçu chronologique;

– bonnes ou mauvaises chaînes de dimension infinie.

§ V.1 : présentation des problèmes et aperçu chronologique.

Commençons par citer un résultat relatif à l'uniforme distribution [KuNi], et qui motive la conjecture de Khinchin :

Proposition-Définition V.1.1. *Soit* $\mathbf{u} = (u_n)_{n\geq 1}$ *une suite de nombres réels.*

Nous dirons que $\mathbf{u}$ *est uniformément distribuée* mod 1 *si quel que soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue et périodique de période* 1,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(u_n) = \int_0^1 f(x)d\lambda(x).$$

Si $(u_n)_{n\geq 1}$ *est uniformément distribuée* mod 1*, alors la convergence ci-dessus a lieu pour toute* f *Riemann intégrable sur* $[0,1]$*, le long de la suite* $(< u_n >)_{n\geq 1}$.

Si $(a_n)_{n\geq 1}$ *est une suite strictement croissante d'entiers, alors pour* λ *presque tout* $x \in \mathbb{T}$*, la suite* $(a_n x)_{n\geq 1}$ *est uniformément distribuée* mod 1.

Voici la *conjecture de forte uniforme distribution de Khinchin* : quelle que soit $f \in L^1(\lambda)$, pour λ presque tout x,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(< nx >) = \int_0^1 f(y)d\lambda(y).$$

Remarquons que d'après la Proposition précédente, la conclusion est vraie pour f continue.

Il est possible de généraliser la "question" de Khinchin. Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'entiers positifs.

Est-ce que quelle que soit $f \in L^1(\lambda)$, pour λ presque tout x,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(< a_n x >) = \int_0^1 f(y)d\lambda(y) \qquad ? \tag{SK}$$

Énonçons à présent le problème parallèle des *sommes de Riemann* : est-ce quelle que soit $f \in L^1(\lambda)$, pour λ presque tout $x \in \mathbb{T}$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{a_N} \sum_{n=1}^{a_N} f(< x + \frac{n}{a_N} >) = \int_0^1 f(y)d\lambda(y) \qquad ? \tag{SR}$$

Pour les problèmes de convergence presque sûre (SK) et (SR) ci-dessus, la réponse est positive si $\mathbf{a} = (a_n) = (p^n)$ avec $p \geq 2$ un entier. Ceci provient du théorème ergodique [Kr] concernant (SK), puisque $x \mapsto px \mod 1$ est une transformation préservant la mesure de Lebesgue, et ergodique.

Pour ce qui est de (SR), cela tient essentiellement à l'inégalité maximale suivante, due à B. Jessen [Je] : si $p \geq 2$ est un entier, il existe une constante $C(p) > 0$ telle que quels que soient $\alpha > 0$ et $f \in L^1(\lambda)$,

$$\lambda(\sup_N |\frac{1}{p^N} \sum_{n=1}^{p^N} f(< x + \frac{n}{p^N} >)| \geq \alpha) \leq C(p) \parallel f \parallel_1 / \ \alpha.$$

En 1964, W. Rudin [Ru] montre, concernant (SR), le résultat suivant :

Théorème V.1.2. *Si la suite croissante d'entiers* $\mathbf{a}$ *est telle que pour chaque* $N \geq 1$*, il existe un sous-ensemble de cardinal* N *d'éléments de la suite tel que chacun d'entre eux ne divise pas le plus petit commun multiple des autres, alors il existe un sous-ensemble mesurable* $A \subset \mathbb{T}$ *tel que la convergence dans* (SR) *n'ait pas lieu* λ*-presque sûrement pour* $f = \mathbf{1}_A$*.*

En 1970, J. Marstrand [Ma] infirme la conjecture de Khinchin :

Théorème V.1.3. *Il existe un sous-ensemble mesurable* $A \subset \mathbb{T}$ *tel que si* $f = \mathbf{1}_A$ *et* $a_n = n$*, la convergence dans* (SK) *n'a pas lieu* λ*-presque sûrement.*

Nous restreignons à présent notre étude de la convergence dans (SK) ou (SR) au cas des suites d'entiers $\mathbf{a}$ qui sont l'énumération croissante des éléments d'une *chaîne*, dont voici la définition :

Définition V.1.4. *Soit* $\mathbf{p} = (p_t)_{t \in E}$ *une suite finie ou infinie de nombres premiers.*

Notons

$$\mathcal{C}(\mathbf{p}) = \{n = \prod_{t \in E} p_t^{\alpha_t} : \alpha_t \in \mathbb{N},\ \sum_{t \in E} \alpha_t < \infty\}.$$

Nous dirons d'un sous-ensemble $\mathcal{C} \subset \mathbb{N}$ *qu'il est une chaîne si il existe* $\mathbf{p}$ *telle que* $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbf{p})$*.*
Une chaîne est donc un sous semi-groupe multiplicatif de $\mathbb{N}$ *engendré par des nombres premiers.*
Nous dirons que $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ *est la chaîne engendrée par* $\mathbf{p}$*.*
Nous dirons qu'elle est de dimension d *si* $\mathbf{p}$ *a* d *éléments.*
Elle sera dite de dimension infinie dans la cas contraire.

Introduisons quelques dénominations supplémentaires, liées aux problèmes de convergence presque sûre dans (SK) et (SR).

Définition V.1.5. *Soit* $p \geq 1$ *ou* $p = \infty$*.*

Nous dirons que la chaîne $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ *est* L^p*-bonne pour* (SK) *(respectivement* L^p*-bonne pour* (SR)*) si pour la suite* $\mathbf{a}$ *la convergence presque sûre a lieu dans* (SK) *(respectivement* (SR)*) quelle que soit* $f \in L^p(\lambda)$*.*

Si tel n'est pas le cas, nous dirons que $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ *est* L^p*-mauvaise pour* (SK) *(respectivement* (SR)*).*

Cette définition s'étend à un ensemble F *de fonctions Lebesgue mesurables sur* $\mathbb{T}$ *quelconque : on parlera alors naturellement de chaîne* F*-bonne ou mauvaise pour* (SK) *ou* (SR)*.*

Nous pouvons traduire les résultats précités de [Je], [Ru], et [Ma], dans le cas particulier d'une chaîne $\mathcal{C}(\mathbf{p})$, de la façon suivante :

– si $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ est de dimension 1, elle est L^1-bonne pour (SR) [Je];
– si $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ est de dimension infinie, elle est L^∞-mauvaise pour (SR) [Ru];
– si $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ est engendrée par tous les nombres premiers, elle est L^∞-mauvaise pour (SK) [Ma].

Avec ce formalisme, nous pouvons énoncer les résultats existants relativement à (SK) et (SR) pour les chaînes :

Théorème V.1.6.

Si $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ *est de dimension finie, elle est* L^∞*-bonne pour* (SK) [Ma].
Si $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ *est de dimension finie, elle est* L^∞*-bonne pour* (SR) [Ba].
Si $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ *est de dimension* d*, elle est* $L \log L^{d-1}$*-bonne pour* (SR) [DuPi].
Si $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ *est de dimension finie, elle est* L^1*-bonne pour* (SK) [Na1].
Si $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ *est de dimension* d*, R. Nair retrouve le résultat de* [DuPi] *par une méthode différente* [Na2] *(il généralise par induction sur* d *l'inégalité maximale de* [Je]*).*
Si $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ *est de dimension* d*, alors l'espace* $L \log L^{d-1}$ *de* [DuPi] *est en un certain sens optimal* [BuWe].

Les résultats positifs concernant (SR) et (SK) utilisent des inégalités maximales. Celui, négatif, de [BuWe], repose sur la *méthode entropique de J. Bourgain* [Bou].

Remarquons enfin que dans le cas de la dimension finie, tant pour (SR) que pour (SK), des résultats positifs sont accessibles. Par contre dès que la dimension est infinie, la réponse est négative dans (SR) déjà pour L^∞.

La question naturelle suivante est posée dans [Na1] :

existe-t-il $\mathbf{p}$ infinie telle que la chaîne associée $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ soit L^1-bonne pour (SK) ?

§ V.2 : bonnes ou mauvaises chaînes de dimension infinie.

L'objet de [La3] est de répondre à la question de [Na1], et de compléter l'étude du problème (SK) dans le cas des chaînes de dimension infinie.

En premier lieu, nous y prouvons le résultat suivant :

Théorème V.2.1. *Il est possible de choisir, successivement, et de façon explicite, une suite infinie croissante de nombres premiers $p_1 < p_2 < \dots$, telle que la chaîne engendrée $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ soit L^1-bonne pour (SK).*

La preuve de ce résultat repose sur un lemme dit "de recouvrement", et la mise en évidence d'une action mesurée du semi-groupe abélien $\ell_0(\mathbb{N}) = \cup_q \mathbb{N}^q$ sur l'espace mesuré $(\mathbb{T}, \lambda)$ (cf. Prop.-Déf^{tn} I.2.1.) : si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q, 0, 0, \dots, 0, \dots) \in \ell_0(\mathbb{N})$ et $x \in \mathbb{T}$, l'action $\Gamma : \mathbb{T} \times \ell_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{T}$ est définie par

$$\Gamma(x, \alpha) = \langle \prod_{i=1}^{q} p_i^{\alpha_i} x \rangle.$$

On utilise alors le Théorème ergodique de Tempel'man [Kr].

Dans [La3] nous affinons notre réponse à la question de [Na1], en appliquant la méthode entropique de J. Bourgain [Bou], laquelle repose sur l'énoncé suivant (particularisé au problème (SK)) (cf. aussi [RoWi] pour un exposé détaillé) :

Théorème-Définition V.2.2. *Soit $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite dans la boule fermée unité de $L^2(\lambda)$. Pour $\delta > 0$, notons $\mathcal{N}((g_n), \delta)$ le nombre minimal de boules dans $L^2(\lambda)$ de rayon δ centrées en certains "g_n" nécessaires pour recouvrir $\{g_n : n \geq 1\}$ (égal à $+\infty$ si besoin).*

Supposons que la chaîne $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ soit L^2-bonne pour (SK).

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que quelle que soit $f \in L^2(\lambda)$ telle que $\| f \|_2 \leq 1$, quel que soit $\delta > 0$,

$$\delta\big(\log \mathcal{N}(\underbrace{(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(< a_n x >))}_{\text{"}g_n\text{"}}, \delta)\big)^{1/2} < C.$$

Si la chaîne est L^∞-bonne pour (SK), alors quel que soit $\delta > 0$, il existe une constante $C(\delta) < \infty$ telle qu'uniformément en $\| f \|_2 \leq 1$ et $f \in L^\infty(\lambda)$,

$$\mathcal{N}\left(\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(< a_n x >)\right), \delta\right) \leq C(\delta).$$

La stratégie pour obtenir des résultats négatifs dans L^2 ou L^∞ est de contredire l'existence de C ou de $C(\delta)$ pour certaines valeurs de δ. J. Bourgain retrouve d'ailleurs dans [Bou] les résultats de [Ma] et [Ru], comme applications de sa méthode.

Dans [La3] nous affinons l'application de [Bou] à (SK). Rappelons quelques notions élémentaires concernant les densités :

– la *densité supérieure* (respectivement *inférieure*) de la suite $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 1}$, notée $d^\star(\mathbf{a})$ (respectivement $d_\star(\mathbf{a})$), est définie par

$$d^\star(\mathbf{a}) = \limsup_{N\to\infty} \frac{\text{Card } [1,N]\cap\{a_n : n\geq 1\}}{N}$$

$$(\text{resp. } d_\star(\mathbf{a}) = \liminf_{N\to\infty} \frac{\text{Card } [1,N]\cap\{a_n : n\geq 1\}}{N});$$

– sa *densité*, si elle existe, est la valeur commune à $d^\star(\mathbf{a})$ et $d_\star(\mathbf{a})$, notée $d(\mathbf{a})$.

Soient, étant données $\mathbf{p} = (p_n)$ une suite croissante infinie de nombres premiers, et $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ la chaîne engendrée, étant donnés $c \geq 1$ et $k \geq 1$ des entiers, et $0 \leq j < k$,

$$\begin{cases} A(j,c) = \mathcal{C}(\mathbf{p}) \cap [p_1^{jc}, p_1^{(j+1)c}[, \\ \rho(c,k) = \min\{\mathrm{Card} A(j+1,c)/\mathrm{Card} A(j,c) : 0 \leq j < k\}, \\ \beta(c,k) = \frac{1}{4}(\rho(c,k)^k \ / \ (1 + \rho(c,k) + \rho(c,k)^2 + \ldots + \rho(c,k)^k). \end{cases}$$

Nous obtenons les critères suivants, qui permettent éventuellement de décider si une chaîne de dimension infinie est mauvaise pour L^2 ou L^∞ :

Théorème V.2.3. *Soit $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ la chaîne engendrée par $\mathbf{p}$.*

Associons lui les deux quantités suivantes :

$$\begin{cases} Q_1(\mathbf{p}) = \limsup_k \sup_{c\geq 1} \beta(c,k)\sqrt{\log k}, \\ Q_2(\mathbf{p}) = \limsup_k \sup_{c \geq 1} \beta(c,k). \end{cases}$$

Alors si $Q_1(\mathbf{p}) = +\infty$, la chaîne $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ est L^2-mauvaise pour (SK).

Et si $Q_2(\mathbf{p}) > 0$, elle est L^∞-mauvaise pour (SK).

En particulier, dès que $d_\star(a) > 0$, $Q_2(\mathbf{p}) \geq \frac{1}{2}$, et la chaîne est L^∞-mauvaise pour (SK).

Remarquons que si $\mathbf{p}$ est finie, $Q_2(\mathbf{p}) = 0$. Remarquons aussi que si $\mathbf{p}$ décrit l'ensemble des nombres premiers sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux, alors $\sup_{c\geq 1} \beta(c,k) \geq \frac{1}{2}$ dès que $k \geq 4$.

Nous appliquons le critère précédent de façon inductive pour construire une suite $\mathbf{p}$ telle que :

– si $\mathbf{p}'$ désigne la suite complémentaire d'entiers premiers, alors $\sum_{p\in\mathbf{p}'} \frac{1}{p} = \infty$;

– $Q_2(\mathbf{p}) \geq \frac{1}{2}$.

La première condition entraîne, via le Théorème de Davenport-Erdös [T, §III.1, Ex. 6], que $d(\mathcal{C}(\mathbf{p})) = 0$.

Et donc avec la seconde, et le Théorème V.2.3., nous obtenons :

Théorème V.2.5. *Il est possible de construire explicitement une chaîne $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ qui soit à la fois de densité nulle et L^∞-mauvaise pour (SK).*

§VI : renormalisations des systèmes de numération

Ce chapitre donne un aperçu d'ensemble des résultats de [La1] et [LaTh]. Les versions abstraites de ceux qui concernent la renormalisation se trouvent dans [HuLa].

Toutefois le cas des systèmes de numération de l'intervalle et des renormalisations linéaires reste à notre avis suffisamment illustratif des phénomènes que nous tentons de décrire, tout en permettant d'éviter une rédaction trop "technique".

Bien que [La1] apparaîsse dans la thèse de l'auteur [La0], nous en exposons rapidement le contenu, qui a motivé notre étude de la renormalisation, jusque là quasi inexistante.

Nous donnons d'abord la définition abstraite des *systèmes de numération de l'intervalle*, et des *suites de positions barycentriques adaptées* associées.

Puis nous exposons en deux sous-chapitres :
– les propriétés métriques des produits de Cantor;
– les critères de presque sûre bonne répartition.

Systèmes de numération de l'intervalle.

Nous travaillons modulo 0 *pour la mesure de Lebesgue* λ, et donc, lorsque nous écrivons (a, b) $(a, b \in \mathbb{R})$, nous désignons n'importe lequel des quatre intervalles possibles; également, les partitions considérées ci-après en sont modulo 0.

Si x est un réel, $\langle x\rangle$ désigne sa partie fractionnaire.

Un *système de numération de l'intervalle* est un couple $\mathcal{S} = ([0, 1], \mathcal{P})$, où

$(SN1)$: $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_i)_{i\geq 0}$, et chaque $\mathcal{P}_i$ est une *partition en intervalles de longueurs positives* de l'intervalle $[0, 1]$;

$(SN2)$: chaque $\mathcal{P}_{i+1}$ *raffine* $\mathcal{P}_i$;

$(SN3)$: $\cup_i \mathcal{P}_i$ *engendre* la tribu des sous-ensembles Lebesgue mesurables de $[0, 1]$.

Notons alors $\mathcal{P}_i = \{P_{i,j} : j \in E_i\}$, et aussi

$$P_{i,j} = (a_{i,j}, b_{i,j}),\ \ j \in E_i,\ \ i \geq 0.$$

Soit $\mathcal{A}_n$ la famille constituée des suites $(j_0, \dots , j_{n-1}) \in \prod_{i=0}^{n-1} E_i$ telles que

$$\cap_{i=0}^{n-1} P_{i,j_i} \neq \emptyset\ \ (= P_{n-1,j_{n-1}} \text{ si non vide}),$$

et soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des *suites de chiffres admissibles*, qui est l'ensemble des suites $(j_i)_{i\geq 0} \in \prod_i E_i$ telles que quel que soit $n \geq 1$, $(j_0, \dots , j_{n-1}) \in \mathcal{A}_n$.

Les propriétés $(SN1 - 3)$ montrent que modulo un ensemble de mesure nulle, quel que soit $x \in (0, 1)$, si $j_i(x) \in E_i$ est défini par $x \in P_{i,j_i(x)}$, alors

$$\{x\} = \cap_i P_{i,j_i(x)}.$$

La suite obtenue $(j_i(x)) \in \prod_i E_i$ est *la suite des chiffres de* x dans le système de numération $\mathcal{S}$.

Soit $(t_n : (0, 1) \to (0, 1))_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires telle que pour chaque n, *ou bien* $t_n = t_{n,1}$ *ou bien* $t_n = t_{n,2}$, où, si $x \in [0, 1]$,

$$\begin{cases} t_{n,1}(x) = (x - a_{n,j_n(x)}) \;/\; (b_{n,j_n(x)} - a_{n,j_n(x)}), \\ t_{n,2}(x) = (b_{n,j_n(x)} - x) \;/\; (b_{n,j_n(x)} - a_{n,j_n(x)}). \end{cases} \tag{V}$$

Nous appelons une telle suite une suite de *positions barycentriques adaptées* à $\mathcal{S}$ (dans [HuLa] il s'agit des *renormalisations linéaires*).

L'étude de la renormalisation des systèmes de numération de l'intervalle que nous proposons consiste à *étudier les propriétés de presque sûre bonne répartition de* $(t_n(x))_{n\geq 0}$.

Ceci fait suite à [Ša] et [Sc,§ 11] où la renormalisation est sous-jacente mais n'est manifestement pas envisagée.

§ VI.1 : les propriétés métriques des produits de Cantor.

Nous présentons ici l'étude de certains résultats concernant la dynamique associée à la numération en produit de Cantor, qui sont illustratifs de l'apparition de comportements pathologiques lorsque la transformation n'est pas uniformément dilatante [CoEc].

C'est en tentant d'obtenir des informations stochastiques sans que soit disponible une mesure absolument continue invariante que nous avons étudié dans [La1] la complète uniforme répartition des suites de positions barycentriques associées au développement en produit de Cantor.

Ainsi il est possible d'*envisager la pathologie comme une motivation pour l'étude des distributions des suites de positions barycentriques.*

Les produits de Cantor.

Soit $k \geq 1$ un entier, et $x \in [0, 1[$. Alors définissons

$$\begin{cases} r_0(x) \geq 1 \text{ comme le seul entier tel que } \frac{r_0(x)-1}{r_0(x)+k-1} \leq x < \frac{r_0(x)}{r_0(x)+k}; \\ Tx = x(\frac{r_0(x)+k}{r_0(x)}); \\ r_{n+1}(x) = r_0(T^n x), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Remarquons que T *est affine par morceaux,* $T' > 1$ *partout, mais il n'existe pas de* $\rho > 1$ *tel que* $T' \geq \rho$.

Dans [Si1] et [Op], il est démontré que

$$x = \prod_{i \geq 0} \frac{r_i(x)}{r_i(x) + k}.$$

Nous obtenons ainsi la *numération en produit de Cantor généralisé.* Pour $k = 1$, il s'agit du produit de Cantor classique [Per].

À x nous associons ses *chiffres*, la suite $(r_i(x))_{i \geq 0}$. *Ces chiffres sont déterminés par l'itération de la transformation* T, le $n^{\text{ième}}$ chiffre étant déterminé par le fait que

$$T^n(x) \in I(r_n(x)) = \left[\frac{r_n(x) - 1}{r_n(x) - 1 + k}, \frac{r_n(x)}{r_n(x) + k} \right[.$$

Notons que T *est injective sur chacun des intervalles* $I(r)$, $r \geq 1$, et que

$$\cup_{r \geq 1} I(r) = [0, 1[.$$

Notons aussi que *la partition* $\{I(r) : r \geq 1\}$ *est Markovienne*, et plus précisément, que

$$T(I(r)) = \cup_{r' \geq r^2 + (r-1)(k-1)} I(r').$$

Nous en déduisons les *conditions d'admissibilité des chiffres* : étant donnée une suite $(r_n)_{n \geq 0}$ d'entiers ≥ 1, il existe x tel que $(r_n)_{n \geq 0} = (r_n(x))_{n \geq 0}$ si et seulement si quel que soit $n \geq 0$,

$$r_{n+1} \geq r_n^2 + (r_n - 1)(k - 1).$$

Enfin, remarquons que si quel que soit $n \geq 0$, $r_n(x) = 1$, alors $x = 0$, le seul point fixe de T.

Peut-être pour le folklore, citons quelques identités remarquables :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \prod_{n \geq 0} \frac{\phi^{(n)}(x)}{\phi^{(n)}(x)+1}, \ \phi(x) = 2x^2 - 1 \ \text{ (formule d'Euler, cf. [MFVP]);} \\ \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = \prod_{n \geq 0} \frac{\gamma^{(n)}(x-1)}{\gamma^{(n)}(x-1)+2}; \ \gamma(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(formule d'Escott, cf. [Es], [Si2]);} \\ \sqrt{2} - 1 = \prod_{n \geq 0} \frac{\psi^{(n)}(1)}{\psi^{(n)}(1)+1}, \ \psi(x) = 4x^2 - 1 + 2x\sqrt{2x^2 - 1} \ \text{ ([St]).} \end{cases}$$

Pathologie de la dynamique associée.

La transformation T que nous avons décrite est affine par morceaux mais n'est pas uniformément dilatante [CoEc], ce qui contraste avec les numérations les plus étudiées, e.g. les fractions continues [Kh], [Sc]. En fait, si $x \neq 0$, alors $T^n x$ tend vers 1.

Le résultat suivant décrit les mesures positives invariantes disponibles :

Théorème VI.1.1. *La seule mesure de probabilités borélienne qui soit T-invariante est δ_0, la mesure de Dirac en 0.*

Soient $0 < a < 1$, $U = [a, 1[$, et $V = T^{-1}(U) \setminus U$.

Alors il y a une correspondance bijective entre l'ensemble des fonctions mesurables positives σ-finies sur V et celui des densités de mesures boréliennes positives σ-finies absolument continues T-invariantes.

Il existe deux sous-ensembles mesurables disjoints de mesures de Lebesgue positives et qui soient T-invariants (on utilise ici le Théorème VI.1.2. *suivant).*

Aucune mesure de probabilités absolument continue et invariante n'est donc disponible. Toutefois, par analogie avec ce qui se passe avec les séries de Sylvester [GoSm], [Ga], nous obtenons des informations stochastiques :

Théorème VI.1.2. *Pour λ-presque tout x de $[0, 1[$,*

$$\beta(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\log r_n(x)}{2^n} \text{ existe.}$$

De plus, il existe une constante $\gamma > 0$ telle que quels que soient $j \geq 1$, $n \geq 0$, et $\varepsilon > 0$,

$$\lambda(x : r_n(x) = j \text{ et } 0 \leq \beta(x) - \frac{\log j}{2^{-n}} \leq \varepsilon) \geq (1 - \frac{2}{e^{\gamma \varepsilon 2^n} - 1})\lambda(x : r_n(x) = j).$$

La fonction β vérifie les identités $\beta(Tx) = 2\beta(x)$ et $\beta(\frac{x}{k+1}) = \frac{1}{2}\beta(x)$.

Le système de numération associé à T.

On a $x = \prod_{n \geq 0} \frac{r_n(x)}{r_n(x)+k}$, et de plus,

$$T^n(x) = \prod_{m \geq n} \frac{r_m(x)}{r_m(x) + k}$$

est le "produit tronqué à l'ordre n".

Posons, pour $r \geq 1$, $a_r = \frac{r-1}{r-1+k}$ et $b_r = \frac{a_r}{a_{r+1}}$. Alors

$$I(r) = [a_r, a_{r+1}[\text{ et } T(I(r)) = [b_r, 1[.$$

Nous obtenons un système de numération $\mathcal{S}$, avec $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_i)$, où chaque $\mathcal{P}_i$ *est constituée des sous-intervalles de longueur maximale sur lesquels T^n est injective.*

En choisissant $t_n = t_{n,1}$ (cf. (V)), on obtient l'expression

$$t_n(x) = \frac{T^n x - a_{r_n(x)}}{a_{r_n(x)+1} - a_{r_n(x)}}, \quad n \geq 0.$$

En appliquant un Lemme de [Ph], nous montrons que

Théorème VI.1.3. *Pour λ-presque tout $x \in [0, 1[$, quels que soient $p \geq 1$ et $f : [0, 1]^p \to \mathbb{R}$ continue, si λ^p désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^p$,*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n(x), \ldots, t_{n+p-1}(x)) \to \int_{[0,1]^p} f(u) d\lambda^p(u).$$

En d'autres termes, la suite $(t_n(x))_{n \geq 0}$ est complètement uniformément distribuée mod 1.

Nous simplifions la preuve du Théorème VI.1.3. dans [LaTh].

§ VI.2 : les critères de presque sûre bonne répartition.

Nous reprenons "le" système de numération $\mathcal{S}$ introduit en début de chapitre, ainsi que les notations associées, et une suite, choisie, de positions barycentriques adaptées (t_n) (cf. (V)).

L'application $\Phi_{\mathcal{S}}$ associée à $\mathcal{S}$ et (t_n).

Pour l'étude de la complète uniforme distribution presque sûre, l'application suivante, introduite dans [LaTh], est essentielle :

Proposition-Définition VI.2.1. *Soit* $0 \le d \le 1$.
Notons, pour $j \ge 0$, $W_n(d) = \{x : 0 \le t_n(x) < d\}$.
Alors $\lambda(W_n(d)) = d$ *(les* t_n *ont une loi uniforme).*
Soit

$$\Phi_{\mathcal{S}} : [0,1]^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$$

définie inductivement en $u = (u_i)_{i\ge 0}$ *à l'aide de la suite de chiffres*

$$(j_i)_{i\ge 0} = (j_i(\Phi_{\mathcal{S}}(u)))_{i\ge 0}$$

en posant

$$\begin{cases} u_0 \in P_{0,j_0}; \\ u_i \in t_{i-1}(\cap_{t=0}^{i} P_{t,j_t}), \ \ i \ge 1. \end{cases}$$

Soit $\lambda^{\mathbb{N}} = \bigotimes_{j\ge 0} \lambda$ *la mesure produit.*
Alors

$$\begin{cases} (i) & \Phi_{\mathcal{S}} \text{ est mesurable;} \\ (ii) & \textit{si } A \subset [0,1] \textit{ est Lebesgue mesurable, } \lambda^{\mathbb{N}}(\Phi_{\mathcal{S}}^{-1}(A)) = \lambda(A); \\ (iii) & \textit{quel que soit } x,\ \Phi_{\mathcal{S}}((t_n(x))_{n\ge 0}) = x; \\ (iv) & \text{si } \Phi_{\mathcal{S}}(u) = x, \text{ et si } i \ge 1,\ |u_i - t_i(x)| \le \lambda(P_{i,j_i(x)}) \big/ \lambda(P_{i-1,j_{i-1}(x)}). \end{cases}$$

Dans [Sc, §11], suivant [Ga], il est démontré que $\lambda(W_n(d)) = d + \mathcal{O}(\frac{5}{6})$ pour les numérations en séries de Engel, Luröth et Sylvester. Notre proposition montre que $\mathcal{O}(\frac{5}{6}) = 0$ convient; elle permet aussi de retrouver certains résultats de [Ša].

Discrépance et Lemmes préliminaires.

Rappelons quelques définitions concernant la discrépance [KuNi] :

Définition VI.2.2. *Soient* $u \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, *et* $p \ge 1$.
Notons $u^{(p)} = (u_j^{(p)})_{j\ge 0} \in ([0,1]^p)^{\mathbb{N}}$ *la suite définie par*

$$u_j^{(p)} = (u_j, u_{j+1}, \dots, u_{j+p-1}),\ j \ge 0,$$

et $\lambda^p = \otimes_{0\le j<p-1}\lambda$ *la mesure produit sur* $[0,1]^p$.
Soit $\mathcal{P}_p = \{(a_1,b_1) \times \ldots \times (a_p,b_p),\ 0 \le a_i \le b_i \le 1,\ 1 \le i \le p\}$ *l'ensemble des pavés de* $[0,1]^{\mathbb{N}}$.
Soient $N \ge 1$ *et* $P \in \mathcal{P}_p$*; alors posons*

$$\begin{cases} E_p(u,N,P) = \text{Card } \{i < N : u_i^{(p)} \in P\} - \lambda^p(P) \cdot N; \\ \\ D_p(u,N) = \sup\limits_{P \in \mathcal{P}_p} |E_p(u,N,P)|, \\ \\ D_p(u) = \limsup\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N} D_p(u,N). \end{cases}$$

Alors $D_p(u)$ *est appelé la discrépance* p*-dimensionnelle (linéaire) de* u.

La discrépance logarithmique p-dimensionnelle de u est définie par

$$D_p^\ell(u) = \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{(\log N)^p} D_p(u,N).$$

La suite $u \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ est dite complètement uniformément distribuée (respectivement uniformément distribuée) si pour chaque $p \geq 1$ (respectivement $p = 1$),

$$D_p(u) = 0.$$

Dans [LaTh], à l'aide du critère de Weyl [KuNi], nous montrons le Lemme préliminaire suivant :

Lemme VI.2.3. *Soient $u, v \in (0,1)^{\mathbb{N}}$.*
Si

$$\frac{1}{N}\sum_{i<N} |u_i - v_i| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors quel que soit $p \geq 1$,

$$(D_p(u) = 0) \Leftrightarrow (D_p(v) = 0)\,.$$

Ce Lemme a sa "version logarithmique" :

Lemme VI.2.4. *Soient $u, v \in (0,1)^{\mathbb{N}}$ telles que*

$$|u_m - v_m| = \mathcal{O}(e^{-m^2}).$$

Alors quel que soit $p \geq 1$,

$$D_p^\ell(u) = D_p^\ell(v).$$

Les critères de presque sûre bonne (complète) distribution.

D'après [KuNi], $\lambda^{\mathbb{N}}$-presque toute suite $u \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ est complètement uniformément distribuée (cf. Déf^{tn} VI.2.2.), et presque toutes ces suites sont telles que quel que soit $p \geq 1$, $D_p^\ell(u) = +\infty$.

Dans [LaTh], via l'application $\Phi_{\mathcal{S}}$ de VI.2.1., nous transportons les propriétés presque sûres connues sur $[0,1]^{\mathbb{N}}$ à $[0,1]$, et obtenons le résultat suivant :

Théorème VI.2.5. *Supposons que*

$$\lambda(\ x : \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\lambda(P_{i+1,j_{i+1}(x)})}{\lambda(P_{i,j_i(x)})} = 0\ ) = 1.$$

Alors λ-presque sûrement, $(t_n(x))_{n\geq 0}$ est complètement uniformément distribuée.
Supposons que

$$\lambda(\ x : \frac{\lambda(P_{i+1,j_{i+1}(x)})}{\lambda(P_{i,j_i(x)})} = \mathcal{O}(e^{-i^2}),\ i \geq 0\ ) = 1.$$

Alors λ-presque sûrement, quel que soit $p \geq 1$, $D_p^\ell((t_n(x))_{n\geq 0}) = +\infty$.

Pour les séries de Engel et Sylvester, le premier critère du Théorème précédent s'applique, ce qui renforce les résultats de [Sc,§ 11].

Il s'applique aussi aux produits de Cantor, ce qui simplifie la preuve du Théorème VI.1.3. de [La1].

Pour ce qui est de la propriété moins forte d'uniforme distribution presque sûre de $(t_n(x))_{n\geq 0}$, en application de [Ph] et de VI.2.1., nous prouvons le :

Théorème VI.2.6. *Supposons qu'il existe $q > 1$ et $k \geq 1$ tels que*

$$\lambda(\ x : \forall p \geq 1,\ \frac{\lambda(B(n_0(x),\ldots,n_{p+k}(x)))}{\lambda(B(n_0(x),\ldots,n_p(x)))} \leq \frac{1}{q}\ ) = 1.$$

Alors pour presque tout x, la suite $(t_n(x))_{n\geq 0}$ est uniformément distribuée.

Applications.

Ceci s'applique à *tous* les systèmes de numération de l'intervalle que l'on trouve dans [Sc], sauf éventuellement certaines β-expansions [Pa3]. Donc la renormalisation a sa place en théorie des nombres presque sûre, en tant que source éventuelle d'informations stochastiques.

Le critère du Théorème VI.2.6. n'est manifestement pas optimal [HuLa]. Nous pensons par contre que le premier du Théorème VI.2.5. n'est pas loin de l'être.

Concluons par une application au système de numération en fractions continues [Kh].

Soit $Tx = \langle \frac{1}{x} \rangle$, $x \in]0, 1[$, la transformation associée, et notons $\frac{p_n}{q_n}$ le $n^{\text{ième}}$ convergent associé à x.

Alors pour λ-presque tout x, la suite $(t_n(x))$ est uniformément mais non complètement uniformément distribuée mod 1, où

$$t_n(x) = \frac{(q_n + q_{n-1})T^n x}{q_n + q_{n-1}T^n x} \text{ ou bien } \frac{q_n(1 - T^n x)}{q_n + q_{n-1}T^n x}.$$

Bibliographie

[Ad] T. Adams, *Smorodinsky's conjecture on rank-one mixing*, to appear Erg. Th. Dyn. Syst. (1997).

[AdKoMA] R.L. Adler, A.G. Konheim & M.H. MacAndrew, *Topological entropy*, Transactions A.M.S **114** (1965), 309-319.

[AlBa] J.-P. Allouche & R. Bacher, *Toeplitz sequences, paper folding, towers of Hanoï and progression-free sequences of integers*, L'Enseignement Mathématique **38** (1992), 315–327.

[Au] J. Auslander, *Minimal flows and their extensions*, vol. 153, North-Holland, Mathematics Studies.

[Ba] R.C. Baker, *Riemann sums and Lebesgue integrals*, Quart. J. Math. Oxford **27** (1976), 191–198.

[Bax] J.R. Baxter, *A class of ergodic transformations having simple spectrum*, Proc. A. M. S. **27** (1971), 275–279.

[Bl1] F. Blanchard, *Fully positive topological entropy and topological mixing*, Symbolic dynamics and applications; A.M.S. Contemporary Mathematics, vol. 135, 1992, pp. 95–105.

[Bl2] F. Blanchard, *A disjointness theorem involving topological entropy*, Bull. Soc. Math. France 121 (1993), 465-478.

[BlHoMaMaRu] F. Blanchard, B. Host, A. Maass, S. Martinez & D.J. Rudolph, *Entropy pairs for a measure*, Ergodic Th. Dyn. Sys. **15** (1995), 621–632.

[BlGlHo] F. Blanchard, B. Host & E. Glasner, *A variation on the variational principle and applications to entropy pairs*, Ergodic Th. Dyn. Sys. **17** (1997), 29–43.

[BlLa] F. Blanchard & Y. Lacroix, *Zero entropy factors of topological flows*, Proceedings A.M.S. **119** (1993), 985–992.

[Bou] J. Bourgain, *Almost sure convergence and bounded entropy*, Israel J. Math. **63** (1988), 79–97.

[BuKw1] W. Bułatek & J. Kwiatkowski, *The topological centralizers of Toeplitz flows and their $\mathbb{Z}_2$-extensions*, Publ. Math. **34** (1990), 45–65.

[BuKw2] W. Bułatek & J. Kwiatkowski, *Strictly ergodic Toeplitz flows with positive entropies and trivial centralizers*, Studia Math. **103** (1992), 133–142.

[BuKwSi] W. Bułatek, J. Kwiatkowski, A. Siemaszko, *Finite rank transformations and weak closure Theorem*, Preprint 1995.

[BuWe] Y. Bugeaud & M. Weber, *Examples and counterexamples for Riemann sums*, Preprint, I.R.M.A. Strasbourg (1996).

[Ch1] R.V. Chacon, *A geometric construction of measure preserving transformations*, Proc. Fifth Berkeley Symposium of Mathematical Statistics and Probability, II, vol. Part 2, Univ. of California Press, 1965, pp. 335–360.

[Ch2] R.V. Chacon, *Approximation and spectral multiplicity*, Lecture Notes in Math., vol. 160, Springer, Berlin, 1970, pp. 18–27.

[CoEc] P. Collet & J.-P. Eckmann, *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Progress in Physics, A. Jaffe & D. Ruelle Eds, Birkhäuser, Basel. Boston. Stuttgart, 1980.

[CoFoSi] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, Ya.G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer Verlag, 1982.

[dlR] T. de la Rue, *Rang des systèmes dynamiques Gaussiens*, Preprint (1996), Université de Rouen.

[dJ] A. del Junco, *A transformation with simple spectrum which is not rank one*, Canad. J. Math. **29** (1977), 655–663.

[DeGrSi] M. Denker, C. Grillenberger & K. Sigmund, *Ergodic Theory on Compact Spaces*, vol. 527, Lecture Notes in Math., Springer–Verlag, Berlin, 1976.

[DeKe] M. Denker & M. Keane, *Almost topological dynamical systems*, Isr. J. Math. **34** (1979), 139–160.

[Do1] T. Downarowicz, *The Choquet simplex of invariant measures for minimal flows*, Israel J. Math. **74** (1991), 241–256.

[Do2] T. Downarowicz, *A minimal 0-1 flow with non compact set of invariant measures*, Prob. Th. Rel. F. **88** (1979), 29–35.

[Do3] T. Downarowicz, *The royal couple conceals their mutual relationship – A noncoalescent Toeplitz flow* **97** (1997), 239–251.

[DoIw] T. Downarowicz & A. Iwanik, *Quasi-uniform convergence in compact dynamical systems*, Studia Math. **89** (1988), 11–25.

[DoKwLa] T. Downarowicz, J. Kwiatkowski & Y. Lacroix, *A criterion for Toeplitz flows to be topologically isomorphic and applications*, Colloq. Math. **68** (1995), 219–228.

[DoLa1] T. Downarowicz & Y. Lacroix, *A non-regular Toeplitz flow with preset pure point spectrum*, Studia Math. **120** (1996), 235–246.

[DoLa2] T. Downarowicz & Y. Lacroix, *Almost 1-1 extensions of Furstenberg-Weiss type and application to Toeplitz flows*, accepted, Studia Mathematica (1998).

[DuPi] L.E. Dubins & J. Pitman, *A pointwise ergodic theorem for the group of rational rotations*, Transactions A. M. S. **251** (1979), 299–308.

[El] R. Ellis, *A semi group associated with a transformation group*, Transactions A.M.S. **94** (1960), 272–281.

[ElGo] R. Ellis & W.H. Gottschalk, *Homomorphisms of transformation groups*, Transactions A.M.S. **94** (1960), 258–271.

[Es] E.B. Escott, *Rapid method for extracting a square root*, Amer. Math. Monthly **44** (1937), 644–646.

[Fe] S. Ferenczi, *Systems of finite rank*, Colloq. Math. **73** (1997), 35–65.

[Fe1] S. Ferenczi, *Systèmes localement de rang un*, Annales de l'Institut H. Poincaré **20** (1984), 35–51.

[FeKw] S. Ferenczi & J. Kwiatkowski, *Rank and spectral multiplicity*, Studia Math. **102** (1992), 121–144.

[FeKwMa] S. Ferenczi, J. Kwiatkowski & C. Mauduit, *A density theorem for (multiplicity, rank) pairs*, J. d'Analyse Math. **65** (1995), 45–75.

[FiKw] I. Filipowicz & J. Kwiatkowski, *Rank, covering number and a simple spectrum*, Journal d'Analyse Math. **66** (1995), 185–216.

[Fu1] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation*, Math. Syst. Theory **1** (1967), 1-49.

[Fu2] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton University Press, New-York.

[FuWe] H. Furstenberg & B. Weiss, *On almost 1-1 extensions*, Israel J. Math. **65** (1989), 311–322.

[Ga] J. Galambos, *Representation of real numbers by infinite series*, vol. 502, Lecture Notes in Math., Springer, 1976.

[GaHe] M. Garsia & G.A. Hedlund, *The structure of minimal sets*, Bull. A. M. S. **54** (1948), 954–964.

[Gl] E. Glasner, *Localization of entropy pairs*, Preprint (1996).

[GlWe1] E. Glasner & B. Weiss, *Dynamics and entropy of the space of measures*, C. R. Acad. Sci. Paris **317 série I** (1993), 239-243.

[GlWe2] E. Glasner & B. Weiss, *Strictly ergodic, uniform entropy models*, Bull. Soc. Math. France **122** (1994), 399–412.

[GlWe3] E. Glasner & B. Weiss, *Topological entropy of extensions*, Ergodic Theory and its Connections with Harmonic Analysis, Cambridge University Press, 1995, pp. 299–307.

[GlWe4] E. Glasner & B. Weiss, *Quasi-factors of zero entropy systems*, Transactions A.M.S. **8** (1995), 665–686.

[GoSm] C. Goldie & R.L. Smith, *On the denominators in Sylvester's series*, Proc. London Math. Soc. **54** (1987), 445–476.

[GoKwLeLi] G.R. Goodson, J. Kwiatkowski, M. Lemańczyk & P. Liardet, *On the multiplicity function of ergodic group extensions of rotations*, Studia Mathematica, **102** (1992), 157–174.

[GoLe] G.R. Goodson & M. Lemańczyk, *On the rank of a class of bijective substitutions*, Studia Mathematica **96** (1990), 219–230.

[GoHe] W. Gottschalk & G.A. Hedlund, *Topological dynamics*, vol. 36, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1955.

[HaKa] B. Hasselblatt & A. Katok, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, vol. 54, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, 1995.

[He] G.A. Hedlund, *Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system*, Math. Syst. Theory **3** (1969), 320–375.

[HeRo] E. Hewitt & K.A. Ross, *Abstract harmonic analysis, I*, Math. Wissen. Band 115, Springer Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1963.

[HuLa] P. Hubert & Y. Lacroix, *Renormalisation of algorithms in the probabilistic sense*, Proceedings of the second international conference in honour of J. Kubilius, Palanga, Lituania, A. Laurinčikas, E. Manstavičius & V. Stakėnas (Eds), vol. 4, New trends in probability and statistics, 1997 Analytic and Probabilistic methods in Number Theory, Palanga, Lituania, pp. 401–412.

[Iw] A. Iwanik, *Toeplitz flows with pure point spectrum*, Studia Math. **118** (1996), 27–35.

[IwLa] A. Iwanik & Y. Lacroix, *Some constructions of strictly ergodic non-regular Toeplitz flows*, Studia Math. **110** (1994), 191–203.

[JaKe] K. Jacobs & M. Keane, *0-1 sequences of Toeplitz type*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **13** (1969), 123–131.

[Je] B. Jessen, *On the approximation of Lebesgue integrals by Riemann sums*, Annals of Math. **35** (1934), 248–251.

[Ke] M. Keane, *Strongly mixing g-measures*, Invent. Math. **16** (1972), 309–353.

[Kh] A.Y. Khinchin, *Continued fractions*, Third Edition, Phoenix Books, The University of Chicago Press, 1935.

[Ki1] J. King, *The commutant is the weak closure of the powers, for rank-1 transformations*, Ergodic Th. Dyn. Sys. **6** (1986), 363–385.

[Ki2] J. King, *Joining - rank and the structure of finite rank mixing transformations*, Journal d'Analyse Mathematique **51** (1988), 182–227.

[Ki3] J. King, *A lower bound for the rank of mixing transformations*, Israel J. Math. **59** (1987), 377–380.

[Ko] M. Koskas, *Complexité des suites de Toeplitz*, under press, Discrete Math. (1996).

[Kr] U. Krengel, *Ergodic theorems*, De Gruyter Studies in Mathematics, 6, Berlin, New York, 1985.

[KuNi] L. Kuipers & H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Pure and Applied Mathematics, Wiley Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts, 1974.

[Kw] J. Kwiatkowski, *Inverse limits of M-cocycles and applications*, Preprint (1997).

[KwLa1] J. Kwiatkowski & Y. Lacroix, *Rank and weak closure theorem, II*, Preprint (1996), 40 pages.

[KwLa2] J. Kwiatkowski & Y. Lacroix, *Multiplicity, rank pairs*, Journal d'Analyse Math. **71** (1997), 205–235.

[KwSi] J. Kwiatkowski & A. Sikorski, *Spectral properties of G-symbolic Morse shifts*, Bull. Soc. Math. France **115** (1987), 19–33.

[KwJLe] J. Kwiatkowski Junior & M. Lemańczyk, *On the multiplicity function of ergodic group extensions. II*, Studia Math. **116** (1995), 207–215.

[La0] Y. Lacroix, *Contribution à l'étude des suites de Toeplitz, et numération en produit infini*, Thèse nouveau régime, Dir^r : P. Liardet, Université de Provence, Marseille, St Charles, 01/1992.

[La1] Y. Lacroix, *Metric properties of generalized Cantor products*, Acta Arithmetica **63** (1993), 61–77.

[La2] Y. Lacroix, *Remarks on the Delange-Coquet formula*, Anz. der Österreich. Akad. der Wissenschaften, math.-naturwiss. Klasse **130** (1993), 49–51.

[La3] Y. Lacroix, *On strong uniform distribution, II: the infinite dimensional case*, accepted, Acta Arithmetica (1998).

[La4] Y. Lacroix, *Mixing and natural extensions*, Publications du séminaire de Probabilités de l'IRMAR, Rennes I (1995), 10 pages.

[LaTh] Y. Lacroix & A. Thomas, *Number systems and repartition*, Journal of Number Theory **49** (1994), 308–318.

[Le] M. Lemańczyk, *Toeplitz Z_2-extensions*, Annales de l'Institut H. Poincaré **24** (1988), 1–43.

[LeLiTh] M. Lemańczyk, P. Liardet & J.-P. Thouvenot, *Coalescence of circle extensions of measure-preserving transformations*, Ergodic Th. Dyn. Sys. **12** (1992), 769–789.

[LeMe] M. Lemańczyk & M. Mentzen, *Compact subgroups in the centralizer of natural factors of an ergodic group extension of a rotation determine all factors*, Erg. Th. Dyn. Syst. **10** (1990), 763–776.

[LeSi] M. Lemańczyk & A. Sikorski, *A class of not local rank one automorphisms arising from continuous substitutions*, Prob. Th. & Rel. F. **76** (1987), 421–428.

[Ma] J.M. Marstrand, *On Khinchin's conjecture about strong uniform distribution*, Proc. London Math. Soc. **21** (1970), 540–556.

[MaPa] N.G. Markley & M.E. Paul, *Almost automorphic symbolic minimal sets without unique ergodicity*, Israel J. Math. **34** (1979), 259–272.

[Mar] J.C. Martin, *The structure of generalized Morse dynamical systems on n symbols*, Transactions A.M.S. **232** (1977), 343–355.

[MFVP] M. Mendès France & A.J. van der Poorten, *From geometry to Euler identities*, Theo. Comp. Science **65** (1989), 213–220.

[Me1] M. Mentzen, *Some examples of automorphisms with rank r and simple spectrum*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **35** (1987), 417–424.

[Me2] M. Mentzen, *Thesis*, Preprint no 2/89, Nicholas Copernicus University, Toruń (1989).

[Na1] R. Nair, *On strong uniform distribution*, Acta Arithmetica **56** (1990), 183–193.

[Na2] R. Nair, *On Riemann sums and Lebesgue integrals*, Monatshefte für Math. **120** (1995), 49–54.

[Ne] J. Neveu, *Sur les suites de Toeplitz*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **13** (1969), 132–134.

[New1] D. Newton, *Coalescence and spectrum of automorphisms of a Lebesgue space*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **19** (1971), 117–122.

[New2] D. Newton, *On canonical factors of ergodic dynamical systems*, J. London Math. Soc. **19** (1979), 129–136.

[Op] A. Oppenheim, *On the representation of real numbers by products of rational numbers*, Quart. J. Math. Oxford **4** (1953), 303–307.

[Ox] J.C. Oxtoby, *Ergodic sets*, Bulletin A.M.S. **58** (1952), 116–136.

[Pa1] W. Parry, *Compact abelian group extensions of discrete dynamical systems*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **13** (1969), 95–113.

[Pa2] W. Parry, *Topics in ergodic theory*, vol. 75, Cambridge Tracts in Math., Cambridge University Press.

[Pa3] W. Parry, *On the β-expansions of real numbers*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar **11** (1960), 401–416.

[Pau] M.E. Paul, *Construction of almost automorphic minimal flows*, General Topology and Applications **6** (1976), 45–56.

[Per] O. Perron, *Irrazionalzahlen*, Chelsea, New-York, 1948.

[Ph] W. Philipp, *Some metrical theorems in Number Theory*, Pacific Jour. of Math. **20** (1967), 109–127.

[Rob1] E.A. Robinson, *Ergodic measure preserving transformations with arbitrary finite spectral multiplicities*, Inventiones Math. **72** (1983), 299–314.

[Rob2] E.A. Rohlinson, *Mixing and spectral multiplicity*, Ergodic Th. Dyn. Sys. **5** (1985), 617–624.

[Roh] V.A. Rohlin, *On the fundamental ideas of measure theory*, A. M. S. Translations. Ser. 1 **10** (1962), 1–54.

[RoWi] J.M. Rosenblatt & M. Wierdl, *Pointwise ergodic theorems via harmonic analysis*, Survey article, Ergodic Theory and its Connections with Harmonic Analysis, Cambridge University Press, 1995, pp. 3–152.

[Ru] W. Rudin, *An arithmetic property of Riemann sums*, Proceedings A.M.S. **15** (1964), 321–324.

[Rud] D.J. Rudolph, *Fundamentals of measurable dynamics, Ergodic theory on Lebesgue spaces*, Clarendon Press, Oxford Science Publications, Oxford, 1990.

[Rud1] D.J. Rudolph, *K-fold mixing lifts to weakly-mixing isometric extensions*, Erg. Th. & Dyn. Syst. **5** (1985), 445–447.

[Ša] T. Šalàt, *Zu einigen Fragen der Gleichverteilung (mod 1)*, Czechosl. Math. J. **18** (1968), 476–488.

[Sc] F. Schweiger, *Ergodic theory of fibred systems and metric number theory*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[Si1] W. Sierpiński, *On certain expansions of real numbers into fast converging products*, in Polish; Russian and English summaries, Prace Math. **2** (1958), 131–138.

[Si2] W. Sierpiński, *Généralisation d'une formule de E.B. Escott pour les racines carrées*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **22** (1953), 520–529.

[St] P. Stambul, *Communication personnelle* (1991).

[T] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique des nombres*, vol. 1, Cours Spécialisés, Collection SMF, Institut H. Poincaré, 75231 Paris Cedex 05, France, 1995.

[Toe] O. Toeplitz, *Beispiele zur theorie der fastperiodischen funktionen*, Math. Ann. **98** (1928), 281–295.

[We] B. Weiss, *Strictly ergodic models for dynamical systems*, Bulletin A.M.S. (NS) **13** (1985), 143–146.

[We1] B. Weiss, *On the work of V.A. Rokhlin in Ergodic Theory*, Ergodic Th. Dyn. Sys., Special Issue in Honour of V.A. Rokhlin **9** (1989), 619–627.

[Wi] S. Williams, *Toeplitz minimal flows which are not uniquely ergodic*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **67** (1984), 95–107.