ISITV, Première Année **MIPS, Rattrapage 2014**

Jeudi 22 Mai 2014, 14h-16h, ISITV.

Tous documents autorsisés, durée 2h heures.

Appareils électroniques interdits.

I : on munit un ensemble Ω de cardinal infini de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω et on définit une application μ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\{0, +\infty\}$ de la manière suivante :

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } A \text{ est finie;} \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

a) Cette application est-elle une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$?
b) Comment la modifier pour en faire une mesure positive?

II : soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A, B, C trois événements indépendants de $\mathcal{B}$. On définit la variable aléatoire X par

$$X = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C.$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$. Déterminer la loi de X.

III : soit U une var de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la fonction de répartition puis la densité de la variable

$$X = 1/(1 + U).$$

IV : Un canal de transmission transmet des bits avec erreur selon le modèle suivant : il transmet fidèlement un bit avec probabilité p et de façon erronée avec probabilité $(1 - p)$ où $0 < p < 1$. On suppose que le bit émis initialement est 0 ou 1 de façon équiprobable, et que la fidélité de la transmission du bit ne dépend pas du bit transmis.

On considère que n canaux de ce type sont en série, et que chaque canal fonctionne indépendamment des autres canaux. On note X_k le bit reçu en sortie du k-ième canal et X_0 le bit émis à l'entrée du premier canal.
a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X_k = 1 | X_{k-1} = 1)$ et $\mathbb{P}(X_k = 1 | X_{k-1} = 0)$.
b) On note b_n la probabilité d'avoir une transmission exacte au canal n, et $m_n = 1 - b_n$ la probabilité d'avoir une transmission erronée au n-ième canal. On pose $\pi_n = (b_n, m_n)$. Trouver une relation matricielle entre π_n et π_{n-1} du type $\pi_n = \pi_{n-1} A$.
c) Calculer π_1 et en déduire π_n en fonction de π_1, n et A.
d) Diagonaliser A et en déduire une expression de A^{n-1}.
e) Quelle est la probabilité que l'information émise à l'entrée du premier canal, soit fidèlement transmise par le canal n ? Que devient cette quantité quand $n \to \infty$?