

**I : convergence certaine mais pas vers une constante.**

a) On se donne  $(E_n)_{n \geq 1}$  une suite iid de loi commune  $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ . On note  $U_n = \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{2^i}$ . Calculer la fonction caractéristique de  $U_n$ .

b) Ecrire un programme qui prenne en entrée  $n$  et renvoie une réalisation de  $U_n$ . Ecrire ensuite un programme qui trace  $U_n$  en fonction de  $n$ , pour  $n \leq N$ ,  $N$  étant une donnée d'entrée. Superposer sur un même graphique cinq tracés. Augmenter  $N$ . Qu'observez vous?

c) La suite  $(U_n)_{n \geq 1}$  converge-t-elle simplement?

d) Montrer qu'elle converge en loi et déterminer la loi de la valeur limite. Évaluer la vitesse de convergence des fonctions de répartition.

**II : Intervalle de confiance.**

a) Ecrire une fonction qui ait pour donnée d'entrée  $n$  et pour sortie un  $n$  échantillon de la loi  $\mathcal{N}(1, 2)$ .

b) On suppose que  $(X_1, \dots, X_n)$  est un  $n$ -échantillon d'une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  : écrire une fonction qui en donnée d'entrée prenne ce  $n$ -échantillon, et en donnée de sortie ressorte les deux bornes  $g$  et  $d$  d'un intervalle de confiance  $[g, d]$  de niveau 95% pour  $\mu$  en utilisant la loi de Student  $\mathcal{T}(n - 1)$ .

c) Réaliser plusieurs tirages par le a), de différentes tailles, et renvoyer par le b) l'intervalle de confiance associé. Qu'observez vous? Illustrez votre propos par un tracé.

**III : adéquation en loi.**

Au tiercé, le départ s'effectue sur huit lignes, numérotées de 1 à 8, de la corde vers l'extérieur. Un tirage au sort conduit à l'attribution de chaque ligne à chacun des compétiteurs.

Un parieur s'interroge pour savoir s'il a intérêt à parier plutôt sur un cheval bénéficiant de la corde au départ. Il se renseigne et on lui communique les données suivantes : sur 144 courses,

Numéro de départ	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de victoires	29	19	18	25	17	10	15	11

a) Quelles hypothèses le parieur doit-il tester?

b) Effectuer un test du  $\chi^2$  : conclusion?

c) Effectuer un test de Kolmogorov-Smirnov : conclusion?