Mercredi 18 Juin 2014.

Cours et TDs autorisés, durée 2h heures.

Appareils électroniques interdits.

I : on considère une suite $(A_i)_{i \geq 0} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ où $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé. On note

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{m \geq n} A_m \text{ et } \liminf A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{m \geq n} A_m.$$

- Justifier de ce que “ $\limsup A_n$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à A_m pour une infinité d'entiers m ”, et également que “ $\liminf A_n$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $\omega \in A_m$ à partir d'un certain rang”.
- En déduire que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.
- Montrer que $\limsup A_n = \bigcap_{n \geq 0} \downarrow (\bigcup_{m \geq n} A_m)$.
- En utilisant la question précédente, montrer que si $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.
- Montrer que $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$, où $B^c = \Omega \setminus B$. Montrer également que si $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x}$.
- On suppose la suite $(A_n)_{n \geq 0}$ indépendante (i.e. la suite $(\mathbf{1}_{A_n})_{n \geq 0}$ indépendante). En utilisant les questions précédentes montrer que si $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

II : un facteur doit distribuer n lettres à n destinataires distincts. Il met une enveloppe par boîte au hasard.

- Quelle est la probabilité pour qu'il distribue correctement les n lettres?
- Quelle est l'espérance du nombre de lettres correctement distribuées?
- Quelle est la probabilité pour qu'aucune lettre ne soit correctement distribuée?

III : soit $n \geq 1$ un entier. Deux joueurs utilisent un dé à n faces numérotées de 1 à n , et équiprobables. Le jeu est le suivant :

- le joueur A lance le dé, obtient la face X , et verse 3 euros au joueur B ;
- le joueur B lance le dé jusqu'à ce qu'il obtienne un valeur $\geq X$. La partie s'arrête alors. À chaque lancer il verse 1 euro au joueur A . On note Y la somme versée au cours la partie par le joueur B au joueur A .

- Calculer $\mathbb{P}(Y = j | X = k)$ pour chaque $1 \leq k \leq n$ et $j \geq 1$.
- Montrer que si Z est une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(Z > n)$ (utiliser par exemple $n = \sum_{m \geq 0} \mathbf{1}_{m < n}$).
- En déduire un encadrement de $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de n , et un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.
- Selon la valeur de n , à quel joueur le jeu est-il favorable? On pourra donner une image préliminaire incomplète en utilisant $e^2 \sim 7.39$ et $e^3 \sim 20.09$.

IV : une agence de voyage dispose de 100 places sur le vol Paris-New York. Pour tenir compte des éventuels désistements, elle décide d'accepter 120 réservations. La probabilité pour qu'un passager ayant réservé se présente à l'embarquement est de 0.8 et les passagers sont supposés indépendants les uns des autres.

- Quelle est la loi de la variable S égale au nombre de passagers qui, ayant réservé, se présenteront effectivement à l'embarquement?
- En utilisant le TCL, proposer une approximation de la forme $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ de la probabilité que le nombre de passagers se présentant à l'embarquement soit supérieur ou égal à 100.
- Combien de réservations au maximum l'agence aurait-elle dû accepter pour que cette probabilité soit inférieure à 0.01? (On exprimera celle-ci à l'aide d'un fractile de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$).