SUPMECA, Première Année **Probas-stats 2014**

Mercredi 18 Juin 2014.

Corrigé.

I :

a) $\omega \in \limsup A_n \Leftrightarrow \omega \in \cap_n \cup_{m\geq n} A_m \Leftrightarrow \forall n \geq 0,\ \exists m \geq n,\ \omega \in A_m \Leftrightarrow Card\{m \geq 0 : \omega \in A_m\} = +\infty$.
$\omega \in \liminf A_m \Leftrightarrow \omega \in \cup_{n\geq 0} \cap_{m\geq n} A_m \Leftrightarrow \exists n \geq 0,\ \forall m \geq n,\ \omega \in A_m$.

b) $\exists n \geq,\ \forall m \geq n,\ \omega \in A_m \Rightarrow Card\{m \geq 0,\ \omega \in A_m\} = +\infty$.

c) $\cup_{m\geq n+1} A_m \subset \cup_{m\geq n} A_m$.

d) $\mathbb{P}(\limsup A_n) = \lim \downarrow \mathbb{P}(\cup_{m\geq n} A_m) \leq \sum_{m\geq n} \mathbb{P}(A_m) \to_{n\to\infty} 0$ si $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$.

e) Formules de Morgan : $(\cap_{n\geq 0} \cup_{m\geq n} A_m)^c = \cup_{n\geq 0} (\cup_{m\geq n} A_m)^c = \cup_{n\geq 0} \cap_{m\geq n} A_m^c$.
$e^{-x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n/n!$ donc si $x \geq 0$ par le critère des séries alternées $1 - x \leq e^{-x}$.

f) $\mathbb{P}(\limsup A_m) = 1 - \mathbb{P}(\liminf A_m^c) = 1 - \lim \uparrow \mathbb{P}(\cap_{m\geq n} A_m^c)$.
$\mathbb{P}(\cap_{m\geq n} A_m^c) = \mathbb{P}(\cap_{p\geq 0} \downarrow \cap_{m=n}^{n+p} A_m^c) = \lim_p \downarrow \mathbb{P}(\cap_{m=n}^{n+p} A_m^c) = \lim_p \downarrow \prod_{m=n}^{n+p} \mathbb{P}(A_m^c)$ par indépendance.
$\prod_{m=n}^{n+p} \mathbb{P}(A_m^c) = \prod_{m=n}^{n+p} (1 - \mathbb{P}(A_m)) \leq \exp(-\sum_{m=n}^{n+p} \mathbb{P}(A_m)) \to_p 0$.
Donc par encadrement, $\lim_p \downarrow \mathbb{P}(\cap_{m=n}^{n+p} A_m^c) = 0$. Donc $\mathbb{P}(\cap_{m\geq n} A_m^c) = 0$. Donc $\mathbb{P}(\liminf A_m^c) = 0$.

II :

a) $1/n!$ car il y a un cas favorable et $n!$ cas possibles, les cas étant par hypothèse équiprobables.

b) $\mathbb{E}(C) = \sum_{c=0}^n c\mathbb{P}(C = c)$ si c désigne la variable aléatoire représentant le nombre de lettres correctement distribuées. Pour qu'il y ait c lettres correctement distribuées, il faut et il suffit qu'un sous ensemble donné de c boîtes se voit attribuer des lettres correctement, et que le complémentaire ne se voit attribuer aucune lettre correctement. Donc

$$\mathbb{P}(C = c) = \sum_{\substack{A\subset\{1,\dots,n\},\\ Card(A)=c}} \frac{\text{nombre de distributions totalement incorrectes de } n-c \text{ lettres pour } n-c \text{ boîtes}}{n!}.$$

Reste donc à déterminer le nombre de distributions totalement incorrectes de $n - c$ lettres pour $n - c$ boîtes, que nous notons $i(n - c)$.

Ceci revient finalement à se poser la question de savoir comment distribuer de façon totalement incorrecte n lettres parmi n boîtes, avec une seule lettre par boîte. Notons $i(n)$ ce nombre. Notons A_i l'événement "*le* $i^{\text{ième}}$ *destinataire a reçu la bonne lettre*". Alors $i(n) = n!\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i^c)$. Nous pouvons calculer $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i)$ par la formule du crible de Poincaré :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) &= \textstyle\sum_{k=1}^n \left(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} (-1)^{k-1} \mathbb{P}(\cap_{j=1}^k A_{i_j})\right) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^n \left(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} (-1)^{k-1} \frac{(n-k)!}{n!}\right) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^n \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{n!}\right) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons puisque $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = 1 - \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i^c)$, que

$$i(n) = n! \left(\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) \text{ (la somme vide est nulle).}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(C) &= \textstyle\sum_{c=1}^n \mathbb{P}(C = c) \\
&= \textstyle\sum_{c=1}^n c \frac{i(n-c)}{n!} \frac{n!}{c!(n-c)!} \\
&= \textstyle\sum_{c=1}^n \frac{1}{(c-1)!} \left(\sum_{k=2}^{n-c} \frac{(-1)^k}{k!}\right).
\end{aligned}$$

c) $i(n)/n! = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

III : notons $(L_i)_{i\geq 1}$ les résultats iid des lancers successifs du joueur B. On les suppose indépendants de X.
a)$j \geq 1$: $\mathbb{P}(Y = j|X = k) = \mathbb{P}(L1 < k\& \ldots \& L_{j-1} < k\& L_j \geq k\& X = k)/\mathbb{P}(X = k) = \frac{n-k+1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}$ avec la convention $0^0 = 1$.
b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \textstyle\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}(Z = n) \\ &= \textstyle\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(Z = n)\left(\sum_{l\geq 0} \mathbf{1}_{l<n}\right) \\ &= \textstyle\sum_{l\geq 0}\left(\sum_{n>l} \mathbb{P}(Z = n)\right) \\ &= \textstyle\sum_{l\geq 0} \mathbb{P}(Z > l). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \textstyle\sum_{l\geq 0} \mathbb{P}(Y > l) \\ &= 1 + \textstyle\sum_{l\geq 1} \mathbb{P}(Y > l) \\ &= 1 + \textstyle\sum_{l\geq 1}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y > l|X = k)\mathbb{P}(X = k) \\ &= 1 + \textstyle\sum_{l\geq 1} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j\geq l+1} \mathbb{P}(Y = j|X = k)\right)\right) \\ &= 1 + \textstyle\sum_{l\geq 1} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{l}\left(\frac{1}{1-\frac{k-1}{n}}\right)\right) \\ &= 1 + \textstyle\sum_{l\geq 1} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{l}\right) \\ &= 1 - \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\textstyle\sum_{k:2}^{n}\sum_{l\geq 0}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{l} \\ &= 1 - \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\textstyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{1-\frac{k-1}{n}} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

On utilise ensuite $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}$ pour encadrer

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \mathbb{E}(Y) \leq 1 + \int_1^{n} \frac{dx}{x} = 1 + \ln(n).$$

On en déduit $\mathbb{E}(Y) \sim \ln(n)$ puisque $\mathbb{E}(Y)/\ln(n) \to 1$.
d) Le gain de A vaut $Y - 3$ et celui de B vaut $3 - Y$. Le gain moyen de A est donc $\mathbb{E}(Y) - 3$ et il le jeu sera favorable au joueur A ssi $\mathbb{E}(Y) \geq 3$: compte tenu de l'encadrement précédent, on est certain que le jeu est défavorable au joueur A si $\ln(n) - 2 \leq 0$ soit $n \leq e^2$, donc pour $n \leq 7$. De l'autre côté, on est certain qu'il est favorable au joueur A si $\ln(n+1) - 3 \geq 0$ soit $n \geq e^3 - 1 \sim 19.09$ et donc pour $n \geq 20$.

IV :
a) S est la somme de 120 v.a.r. iid suivant une loi de Bernoulli de paramètre 0.8, si l'on modélise le fait que le $i^{\text{ième}}$ passager se présente à l'embarquement par une variable de Bernoulli X_i ($X_i = 1$ s'il se présente). Donc S suit une loi binomiale de paramètres 120 et 0.8.
b) On a $S = \sum_{i=1}^{120} X_i$, $\mathbb{E}(S) = 120 \times 0.8 = 96$, $Var(S) = 120 \times 0.8 \times 0.2 = 19.2$. Alors $\bar{X}_{120} = \frac{1}{120}S$, $\mathbb{E}(\bar{X}_{120}) = 0.8$, $Var(\bar{X}_{120}) = \frac{0.2\times 0.8}{120}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S \geq 100) &= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_{120}-0.8}{\sqrt{Var(\bar{X}_{120})}} \geq \frac{\frac{100}{120}-0.8}{\sqrt{Var(\bar{X}_{120})}}\right) \\ &\sim \mathbb{P}(Y \geq 0) \qquad (\text{ si } \mathbb{P}_Y = \mathcal{N}(0,1) \text{ d'après le TCL}) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) Ici on cherche n le nombre de réservations maximal tel que $\mathbb{P}(S \geq 100) \leq 1\%$. Par le calcul qui précède, cela revient à chercher n tel que si $\int_{\alpha_{0.01}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx = 0.01$, alors

$$\alpha_{0.01} \leq \sqrt{n}\left(\frac{\frac{100}{n} - 0.8}{\sqrt{16/100}}\right) \Leftrightarrow 0.8n + \frac{2}{5}\alpha_{0.01}\sqrt{n} - 100 \leq 0.$$

On pose $u = \sqrt{n}$ et on cherche le domaine où $0.8u^2 + \frac{2}{5}\alpha_{0.01}u - 100 \leq 0$ soit $u_1 \leq u \leq u_2$ si u_1, u_2 sont les deux racines. On trouve $\alpha_{0.01} = 2.33$, $\Delta = 320.8686... = 17,913^2...$, $u_1 < 0$, $u_2 \sim 10,73$, et donc il faut $n \leq u_2^2 \sim 112,63$, donc $n_{max} = 112$ (on ne demandait pas les applications numériques).