

**À rendre en fin de deuxième séance de TP**  
**sous forme de fichier attach (rapport + programmes)**

**La première séance sera une séance d'initiation**

**Première séance (2 heures): ouverture matlab, LFGN, TCL, Monte-Carlo.**

**I** : ouvrir matlab, et générer une matrice de dimensions  $(5, 6)$  de nombres aléatoires entre 0 et 1, indépendants, selon la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

**II** : écrire un petit programme qui permette de rentrer en entrées un entier positif  $n$  ainsi qu'une fonction, et qui ressorte par la loi forte des grands nombres une valeur approchée de l'intégrale de la fonction sur  $[0, 1]$ .

**III** : écrire un petit programme qui utilise le programme précédent et renvoie un intervalle de confiance de niveau 95% pour la valeur de l'intégrale de la fonction choisie.

**Deuxième séance (2 heures): chaînes de Markov**

**IV** : on appelle graphe orienté la donnée d'un ensemble de points du plan  $S$  ainsi que d'une matrice d'adjacence  $A$  carrée d'ordre  $\text{Card}(S)$  constituée de 0s et de 1s. Alors on représente, si  $S = \{x_i : i \in I\}$ , une flèche orientée de  $x_i$  vers  $x_j$  si  $A_{i,j} = 1$ . Que représentent  $A^2, A^3, \dots, A^n$ ?

**V** : on choisit  $S = \{(m, n) \in (\mathbb{Z}^*)^2 : |m| + |n| = 3, m \neq n\} \cup \{(0, 0)\}$ . Trouver une matrice d'adjacence  $A$  telle que le graphe orienté associé ne permette jamais de joindre directement deux points de quadrans distincts, et telle que  $A^2$  ne soit pas totalement positive mais  $A^3 > 0$ . Tracer ce graphe orienté en utilisant matlab.

**VI** : de chaque point du graphe orienté, à chaque flèche qui en part, assigner un réel positif, de sorte que la somme des valeurs soit égale à 1, en partant d'un sommet donné quelconque du graphe orienté. Muni de ces poids on parle de graphe orienté pondéré. On note  $P$  la matrice stochastique indexée par  $S \times S$  qui d'un état à l'autre renvoie la valeur du poids de la flèche de l'arbre pondéré, s'il y en a une, sinon 0.

**VII** : montrer qu'une chaîne de Markov d'espace d'états  $S$  et de matrice de transition  $P$  est irréductible et apériodique. Calculer avec des fonctions matricielles de Matlab la distribution invariante de la chaîne.

**VIII** : expliciter  $\varepsilon, k, \delta$  telles que la chaîne satisfasse la condition de Doeblin associée. En déduire la vitesse à laquelle l'itérée de  $P$  converge vers la matrice de rang 1 de lignes identiques égales à la distribution invariante de la chaîne. Proposer un mode opératoire pour visualiser cette vitesse de convergence en utilisant matlab.