

I : on note Γ la fonction gamma d'Euler : $a > 0 \mapsto \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$. On vérifie facilement que

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad \Gamma(n) = (n-1)!.$$

La loi gamma de paramètres a et θ , notée $\Gamma(a, \theta)$, est la loi de densité

$$\frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x} \mathbf{1}_{x>0}.$$

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid de var de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $S_0 = 0$. On définit alors

$$N_t = \max\{n : S_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

- 1a) Montrer que S_n et X_{n+1} sont indépendantes.
- 1b) Montrer que si $n \geq 1$, S_n suit une loi $\Gamma(n, \lambda)$ (convolution...).
- 1c) Montrer que pour tout $t > 0$ et $n \geq 0$, $\{N_t > n\} = \{S_{n+1} \leq t\}$.
- 1d) Si $n \geq 1$, montrer que $\mathbb{P}(S_n \leq t) = g_n(\lambda t)$, où

$$g_n(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t x^{n-1} e^{-x} dx.$$

- 1e) Montrer que $g_{n+1}(t) = -\frac{1}{\Gamma(n+1)} e^{-t} t^n + g_n(t)$.
- 1f) Montrer que $\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t)$.
- 1g) Montrer que pour tout $t > 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt .
- 2a) Si U suit une loi $\mathcal{U}([0, 1])$, quelle est la loi de $Y = -\ln(U) / \lambda$?
- 2b) Que fait le programme informatique suivant ?

```

N=0;S=0;
While S ≤ 1
    U=rand;
    S=S-ln(U)/λ;
    N=N+1;
End;
Print N-1

```

II: montrer que si R suit une loi $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$ et θ une loi $\mathcal{U}([0, 2\pi])$, alors

$$X = \sqrt{R} \cos \theta \text{ et } Y = \sqrt{R} \sin \theta$$

sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

III: en utilisant le théorème de dérivation de l'intégrale paramétrée, trouver une équation différentielle que satisfait la fonction caractéristique d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. En déduire sa valeur.

IV: soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de var iid d'espérances 1 prenant deux valeurs $0 < a < 1 < b$ avec les probabilités respectives p et $1-p$ ($0 < p < 1$). On note $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$.

1) Montrer que si $x > 0$ et $x \neq 1$, alors $\ln(x) < x - 1$. En déduire que $\mathbb{E}(\ln(X_1)) < 0$. En étudiant le comportement de $\frac{1}{n} \ln(Y_n)$, montrer que Y_n converge *p.s.* vers une limite à préciser. Un joueur joue tous les jours le dixième de sa fortune à pile ou face avec un ami. Quelle est l'évolution de cette fortune au bout d'un temps très long?

2) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$. La suite Y_n converge-t-elle dans $\mathcal{L}^1$?