SEATECH 1A Promo 2019, **MIPS TD2**

I: calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx}dx$ pour $b>1$.

II: soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré positif et soit $f:\Omega \to \mathbb{R}^p$ et $g:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ deux applications mesurables. Montrer que

$$\mu_{g\circ f} = (\mu_f)_g\,.$$

III: soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $U:\Omega \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $\mathbb{P}_U$ soit la loi uniforme sur $[0,1]$.

i) Déterminer la loi de $\mathbb{P}_{U^2}$. Est-elle absolument continue par rapport à λ_1?

ii) Trouver Ψ telle que la loi de $\Psi(U)$ soit $\mathcal{P}(\lambda)$.

iii) Trouver Φ telle que la loi de $\Phi(U)$ soit $\mathcal{N}(0,1)$.

IV : Une cerise est placée sur la circonférence d'un gateau rond que l'on partage en 2 au hasard en pratiquant deux découpes suivant des rayons. Si on prend la position de la cerise comme origine des angles, les positions U et V des deux coups de couteau sont des variables uniformément réparties sur $[0,2\pi]$ indépendantes. Exprimer la taille T de la part contenant la cerise, calculer son espérance puis déterminer la probabilité pour que cette part soit plus grosse que l'autre. Quelle doit être la décision d'un gourmand qui doit choisir entre la part avec la cerise et la part sans la cerise avant le découpage ?

V: Les durées de vie S et T de deux machines suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs α et β et sont indépendantes. Quelle est la loi du couple $(\min(S,T), |T-S|)$? (On rappelle que $|T-S| = \max(S,T) - \min(S,T)$). Les variables $min(S,T)$ et $|T-S|$ sont-elles indépendantes ?

VI: Soit R et θ, deux variables aléatoires indépendantes uniformément réparties respectivement sur $[0,1]$ et $[0,2\pi]$. Le vecteur $(X,Y) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$ est-il uniformément réparti sur le disque unité $D = \{(x,y) : x^2+y^21\}$ i.e. possède-t-il la densité $\frac{1}{\pi}\mathbf{1}_D(x,y)$?

VII: Chaque jour, dans une certaine ville, 100 personnes ont besoin d'un examen radioscopique. Pour préserver le libre choix, n centres d'imagerie sont installés dans cette ville. On admet que les patients choisissent indifféremment l'un ou l'autre centre d'imagerie. Soit N le nombre de clients journaliers dans un centre d'imagerie.

1. Quelle est la probabilité qu'un client choisisse le centre d'imagerie considéré ?
2. Montrer que N peut s'écrire $N = \sum_{i=1}^{100} X_i$ où les $(X_i)_{1\le i\le n}$ sont n variables aléatoires indépendantes et distribuées suivant la loi de Bernoulli de même paramètre p que l'on déterminera.
3. Quelle est la loi de N ?
4. On donne que si Y suit la loi normale centrée réduite, alors $\mathbb{P}(Y \le 2) = 98\%$. En utilisant le TLC, déterminer quelle capacité $c(n)$ chaque centre d'imagerie doit avoir pour être capable de répondre à la demande avec une probabilité de 98% ? Cas où $n=2$, $n=3$, $n=4$?
5. Quel est le coût de la concurrence : quelle surcapacité $s(n)$ la concurrence entraîne-t- elle par rapport à une situation où chaque centre se verrait affecter un même nombre de clients ? Cas où $n=2$, $n=3$, $n=4$?