I : soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré positif. Montrer les propriétés suivantes :
i) si $A, B \in \mathcal{B}$ et $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$;
ii) si $A_n \in \mathcal{B}$, $n \geq 1$, alors $\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.

II: soit $\lambda > 0$ et $\mathbb{P}$ la loi de Poisson de paramètre λ sur $\mathbb{N}$. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $f(n) = n$.
i) calculer $\int_{\mathbb{N}} f d\mathbb{P}$, et $\int_{\mathbb{N}} f^2 d\mathbb{P}$.
ii) calculer les mêmes intégrales pour la loi géomtrique de paramètre q.

III: application du théorème de convergence monotone. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Trouver la limite de

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{f^2(t) + 1/n}}.$$

IV: une application du théorème de convergence dominée. Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ bornée et Lebesgue intégrable et telle que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$. Montrer qu'alors pour tout $t \in]a,b[$ la fonction $x \mapsto \int_{]a,t[} \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(t-x)}} dx$ est intégrable sur $]a,t[$. Calculer ensuite

$$\lim_{t \to a^+} \int_{]a,t[} \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(t-x)}} dx.$$