Corrigé rattrapage probabilités et statistiques 2014
ISITV Première année

1. Premier exercice

a) Ω étant infini, il contient un ensemble dénombrable $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots\}$. Posons $A_n = \{\omega_n\}$, alors A est l'union disjointe des A_n et donc si μ était une mesure positive, il faudrait que

$$\mu(A) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

Or $\mu(A) = +\infty$ et la somme de la série est nulle. Donc μ n'est pas une mesure positive.

b) En posant $\mu(A) = Card(A)$ si A est fini et $\mu(A) = +\infty$ sinon, μ devient une mesure positive. En effet, on a toujours $\mu(\emptyset) = 0$ et si les A_n sont deux à deux disjoints, deux cas de figure peuvent survenir :

- soit l'un d'eux est infini auquel cas leur réunion aussi et $\mu(\cup_n A_n) = +\infty = \sum_n \mu(A_n)$;

- soit tous sont finis et alors on exploite le fait que la mesure de comptage est une mesure positive pour conclure que le second axiome de mesure est bien satisfait.

2. Second exercice

On utilise le fait que $\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\cap B}$ et que $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ pour conduire les calculs de façon élémentaire :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C).$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C + 2(\mathbf{1}_{A\cap B} + \mathbf{1}_{A\cap C} + \mathbf{1}_{C\cap B}) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) + 2(\mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(\cap CA) + \mathbb{P}(B\cap C)).\end{aligned}$$

La variable X prend les valeurs entières $0, 1, 2, 3$ et comme A, B, C ainsi que leurs complémentaires sont indépendants, il vient

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{P}(X=0) & = & (1-\mathbb{P}(A))(1-\mathbb{P}(B))(1-\mathbb{P}(C)) \\
\mathbb{P}(X=1) & = & \mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(B))(1-\mathbb{P}(C)) + (1-\mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B)(1-\mathbb{P}(C)) + (1-\mathbb{P}(A))(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(C) \\
\mathbb{P}(X=2) & = & \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)(1-\mathbb{P}(C)) + \mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(C) + (1-\mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\
\mathbb{P}(X=3) & = & \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)
\end{array}$$

3. Troisième exercice

On sait que $\mathbb{P}(0 \le U \le 1) = 1$ et donc $\mathbb{P}(\frac{1}{2} \le X \le 1) = 1$. Il s'ensuit que $F_X(t) = 0$ si $t < \frac{1}{2}$ et $F_X(t) = 1$ si $t \ge 1$. Supposons que $\frac{1}{2} \le t < 1$: alors puisque $F_U(t) = t$ si $0 \le t \le 1$,

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \mathbb{P}(U \ge \frac{1}{t} - 1) = 1 - (\frac{1}{t} - 1) = 2 - \frac{1}{t}.$$

On en dénduit, puisque F_X est continue et dérivable à droite, que $\mathbb{P}_X$ admet une densité égale à

$$\frac{d\mathbb{P}_X}{d\lambda_1}(x) = \frac{1}{t^2}\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}(t).$$

4. Quatrième exercice

a) Puisque la probabilité d'erreur de transmission sur un canal ne dépend pas de la donnée d'entrée,

$$\begin{array}{c}
\mathbb{P}(X_k = 0 \text{ et } X_{k-1} = 0) = \mathbb{P}(X_k = 1 \text{ et } X_{k-1} = 1) \\
\text{et aussi } \mathbb{P}(X_k = 0 \text{ et } X_{k-1} = 1) = \mathbb{P}(X_k = 1 \text{ et } X_{k-1} = 0).
\end{array}$$

Par ailleurs, $\mathbb{P}(X_k = X_{k-1}) = p = \mathbb{P}(X_k = 0 \text{ et } X_{k-1} = 0) + \mathbb{P}(X_k = 1 \text{ et } X_{k-1} = 1)$ et $\mathbb{P}(X_k \neq X_{k-1}) = 1 - p = \mathbb{P}(X_k = 0 \text{ et } X_{k-1} = 1) + \mathbb{P}(X_k = 1 \text{ et } X_{k-1} = 0)$. Il s'ensuit que

$$\begin{array}{c}
\mathbb{P}(X_k = 0 \text{ et } X_{k-1} = 0) = \mathbb{P}(X_k = 1 \text{ et } X_{k-1} = 1) = \frac{p}{2} \\
\text{et aussi } \mathbb{P}(X_k = 0 \text{ et } X_{k-1} = 1) = \mathbb{P}(X_k = 1 \text{ et } X_{k-1} = 0) = \frac{(1-p)}{2}.
\end{array}$$

Enfin, puisque les bits d'entrée sont émis de façon équiprobable, il vient $\mathbb{P}(X_k = i) = \frac{1}{2}$, $i = 0, 1$.

Donc $\mathbb{P}(X_k = 1|X_{k-1} = 1) = P(X_k = 1 \text{ et } X_{k-1} = 1)/\mathbb{P}(X_{k-1} = 1) = p$ et un calcul similaire donne $\mathbb{P}(X_k = 1|X_{k-1} = 0) = P(X_k = 1 \text{ et } X_{k-1} = 0)/\mathbb{P}(X_{k-1} = 0) = 1 - p$.

b) Les transmissions sur un canal sont indépendantes des autres. On va considérer que la transmission sur n canaux consécutifs résulte de la transmission sur les $n-1$ derniers canaux précédée de la transmission sur le premier canal. On a alors une bonne transmission sur n canaux si on a une bonne transmission à la fois sur le premier canal et sur les $n-1$ derniers, ou bien une erreur sur le premier canal et une erreur de la transmission résultant des $n-1$ derniers canaux. Un raisonnement analogue vaut pour les mauvaises transmissions sur n canaux consécutifs. Par indépendance on déduit

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1}b_1 + m_{n-1}m_1 = pb_{n-1} + (1-p)m_{n-1} \\ m_n = b_{n-1}m_1 + m_{n-1}b_1 = (1-p)b_{n-1} + pm_{n-1} \end{cases} \Longrightarrow (b_n, m_n) = (b_{n-1}, m_{n-1}) \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

c) $\pi_1 = (p, 1-p)$ et bien entendu $\pi_n = \pi_1 A^{n-1}$.

d) On calcule le polynôme caractéristique de A : $det(\lambda I_2 - A) = (\lambda - p)^2 - (1-p)^2 = (\lambda - 1)(\lambda - (2p-1))$, et comme $0 < p < 1$, A admet deux valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable.

Un vecteur propre associé à la valeur propre 1 est $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour en trouver un associé à la valeur propre $2p-1$, on résoud

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2p-1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} px + (1-p)y & = & (2p-1)x \\ (1-p)x + py & = & (2p-1)y \end{cases} \Rightarrow x = -y.$$

On peut donc choisir comme second vecteur propre de la base de vecteurs propres $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Si B_2 désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et si $C = \{u_1, u_2\}$, alors

$$A = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = Diag(1, (2p-1)).$$

Avec la comatrice, on calcule $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}P$. Il s'ensuit, puisque $A^q = PD^qP^{-1}$, et $D^q = Diag(1,(2p-1)^q)$, que

$$A^{n-1} = \frac{1}{2}PD^{n-1}P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(2p-1)^{n-1} & 1-(2p-1)^{n-1} \\ 1-(2p-1)^{n-1} & 1+(2p-1)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$(b_n, m_n) = (p, 1-p)A^{n-1} = \frac{1}{2}(1+(2p-1)^n, 1-(2p-1)^n).$$

- Si $p = \frac{1}{2}$, $b_n = m_n = \frac{1}{2}$ pour tout n;
- si $p \neq \frac{1}{2}$, $(2p-1)^n \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$, et donc $b_n \rightarrow \dfrac{1}{2}$ et $m_n \rightarrow \frac{1}{2}$;
- on remarque que $(p > \frac{1}{2}) \Leftrightarrow (b_n > m_n,\ n \geq 1)$.