SEATECH, Première Année **MIPS, Première Session 2014**

Mardi 6 Mai 2014, 8h30-10h30, ISITV.

Tous documents autorsisés, durée 2h heures.

Appareils électroniques interdits.

I : calculer au point $(0,1,2)$ la drive de

$$f:(x,y,z)\mapsto(x^2+y^2,\frac{x}{y},xyz).$$

II: calculer l'aire du triangle de sommets d'affixes $1+i$, $2+4i$ et $3-i$.

III: pour fidéliser ses clients, une marque de chocolat place dans chaque tablette une pièce d'un puzzle. Le puzzle est composé de n morceaux distincts. Le morceau qui se trouve dans une tablette est supposé suivre une loi uniforme sur les n morceaux possibles. Le client est supposé acheter les différentes tablettes au hasard. On s'intéresse au nombre N d'achats à réaliser pour pouvoir compléter le puzzle.

1) Pour $0\leq m\leq n-1$, que vaut $\mathbb{P}(N>m)$?

2) On suppose que $m\geq n$.

2a) Pour $1\leq k\leq n$, A_k^m désigne l'évènement "*la* $k^{\text{ième}}$ *pièce n'a toujours pas été obtenue au bout de* m *achats*". Calculer pour $k_1,\ldots,k_r\in\{1,\ldots,n\}$ distincts la probabilité $\mathbb{P}(A_{k_1}^m\cap\ldots\cap A_{k_r}^m)$ (préciser l'espace Ω choisi pour modéliser les pièces obtenues dans les m tablettes achetées et la probabilité dont il est muni).

2b) Montrer que $\{N>m\}=\cup_{k=1}^n A_k^m$.

2c) On rappelle la formule du crible de Poincaré :

$$\mathbb{P}(B_1\cup\ldots\cup B_n)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}\mathbb{P}(B_{i_1}\cap\ldots\cap B_{i_k}).$$

En déduire que

$$\mathbb{P}(N>m)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}C_n^k(1-\frac{k}{n})^m.$$

3) En remarquant que pour tout $l\in\mathbb{N}$, $l=\sum_{m\geq 0}1_{l>m}$, montrer que

$$\mathbb{E}(N)=\sum_{m\geq 0}\mathbb{P}(N>m).$$

(*penser à écrire* $\mathbb{E}(N)=\sum_{p\geq 0}p\mathbb{P}(N=p)$).

En déduire une expression de $\mathbb{E}(N)$.

4) Donner la loi de N en exprimant $\mathbb{P}(N=m)$ en fonction de certains $\mathbb{P}(N>k)$.

Le première pièce ayant été découverte dans la première tablette ($N_1=1$), on note N_2 le nombre d'achats supplémentaires nécessaires pour en obtenir une seconde, puis N_3 pour une troisième et ainsi de suite.

5) Exprimer N en fonction de $N_1, \dots, N_n$.

6) On note X_i le numéro de la $i^{\text{ième}}$ pièce de puzzle obtenue. Pour $m \geq 1$, montrer que

$$\{N_2 = m\} = \cup_{i=1}^{n} \{X_1 = i, X_2 = i, \dots, X_m = i, X_{m+1} \neq i\}.$$

7) Par hypothèse, les X_i sont des variables aléatoires indépendantes équidistribuées sur $\{1, \dots, n\}$. En déduire la loi de N_2.

8) Pour $m_2, m_3 \geq 1$, exprimer l'évènement $\{N_2 = m_2, N_3 = m_3\}$ en fonction des X_i. Calculer sa probabilité et en déduire l'indépendance de N_2 et N_3.

9) Justifier intuitivement que les N_i sont des variables géométriques et donner leurs paramètres.

10) En déduire l'expression de $\mathbb{E}(N)$.

11) Conclure que

$$\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} C_n^r \frac{1}{r} (1 - \frac{r}{n})^n = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}.$$