SEATECH PROMO 2017 **MIPS 2014 Examen**
Le Vendredi 12 Décembre 2014 **13h30→15h30.**

Deux feuilles A4 manuscrites recto verso autorisées.
Appareils électroniques interdits.
Les réponses non argumentées seront considérées comme nulles.

Exercice 1 (4 points - 20mn) : calculer $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ par la méthode des résidus. On déterminera d'abord les pôles, leur multiplicité, on identifiera ensuite le type d'intégrale et la méthode correspondante pour la calculer, et enfin on appliquera la formule du cours.

Exercice 2 (2 points - 5mn) : le chevalier de Méré s'étonnait qu'en lançant deux dés il obtenait plus souvent 11 que 12 alors que ces deux nombres ne s'obtiennent chacun que par une somme possible des deux dés ($5+6$ et $6+6$). Qu'en pensez-vous?

Exercice 3 (2 points - 5mn) : une population comporte 60% de femmes et 40% d'hommes. Par ailleurs, 10% des hommes ont les cheveux longs et 40% des femmes ont les cheveux courts. Sachant qu'une personne se présente avec les cheveux longs, quelle est la probailité pour que ce soit une femme?

Exercice 4 (3 points - 10mn) : soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi de Poisson de paramètre λ, et Y une loi de Poisson de paramètre β. Quelle est la loi de $X+Y$ (*Indication : on pourra rechercher la fonction caractéristique de* $X+Y$ *par exemple*)?

Exercice 5 (3 points - 20mn) : on s'intéresse à l'effet biologique produit par des électrons émis par une cathode. On suppose que chaque électron émis a une probabilité p d'être actif. On suppose que tous les électrons ont un comportement indépendant les uns des autres. On note Z le nombre d'électrons émis et Y le nombre d'entre eux qui sont actifs.

On suppose que Z suit une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer la loi de Y (*Indication : exprimer* $\mathbb{P}(Y=k|Z=n)$ *puis* $\mathbb{P}(Y=k)$ *en fonction des* $\mathbb{P}(Y=k|Z=n)$).

Exercice 5 (6 points - 40mn) : une princesse a n prétendants numérotés par ordre de mérite décroissant $1,2,\dots,n$. Elle doit en choisir un. Le problème est qu'ils défilent un par un au hasard devant elle et qu'elle ne peut revenir sur son choix si elle en a laissé un partir. Elle doit donc adopter une stratégie pour avoir le plus de chances de choisir le meilleur... .

Soit Ω l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$. On le munit de la probabilité uniforme.

Un élément $\sigma \in \Omega$ représente un tirage du hasard (les prétendants défilent dans l'ordre $\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n)$).

Au fur et à mesure que les prétendants défilent la princesse leur attribue un classement. Ce classement évolue bien entendu au cours du défilement des prétendants.

Pour $1 \le k \le n$ on introduit la variable aléatoire entière Y_k $(= Y_k(\sigma))$ qui est le classement du prétendant numéro $\sigma(k)$ dans l'ensemble $\{\sigma(1),\dots,\sigma(k)\}$ rangé en ordre décroissant : $Y_k = 1$ signifie qu'il est le meilleur parmi les prétendants numérotés $\{\sigma(1),\dots,\sigma(k)\}$ qu'elle a déjà vus, etc.

a) Montrer que $F : \sigma \mapsto (Y_1(\sigma),\dots,Y_n(\sigma))$ définit une bijection de Ω sur $\Gamma = \{1\} \times \{1,2\} \times \dots \times \{1,\dots,n\}$ (on pourra montrer qu'elle est d'une part injective, et d'autre part surjective).

b) Calculer le cardinal de Γ. Choisir $(y_1,\dots,y_n) \in \Gamma$ et calculer $\mathbb{P}((Y_1,\dots,Y_n) = (y_1,\dots,y_n))$. En déduire $\mathbb{P}((Y_1,\dots,Y_{n-1}) = (y_1,\dots,y_{n-1}))$, puis $\mathbb{P}((Y_1,\dots,Y_k) = (y_1,\dots,y_k))$, $1 \le k \le n$. Ensuite calculer $\mathbb{P}(Y_k = t)$, $1 \le k \le n$, et en déduire que les variables Y_j sont indépendantes et que Y_k suit la loi uniforme sur $\{1,2,\dots,k\}$.

c) Soit $\tau_r = \inf\{k \ge r : Y_k = 1\}$ $(= n+1$ si cet ensemble est vide). Que représente τ_r? Calculer la probabilité pour qu'au temps τ_r le prétendant qui se présente soit le meilleur (i.e. le numéro 1 global, “the best mate” (cf. TOIEC)). Quelle peut alors être la stratégie de la princesse ? Trouver l'équivalent de τ_r lorsque $n \to +\infty$.