Exercice 1 (4 points - 20mn) : on a un pôle en -1, et sur l'axe. Il faut déterminer les autres pôles. $z^3+1=(z-1)(z^2-z+1)$, et $z^2-z+1=0$ si $z=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Les trois pôles sont simples. On reconnaît une intégrale du troisième type. On doit prendre en compte le pôle sur l'axe et celui de partie imaginaire positive. Pour y calculer les résidus on utilise la formule du cours, avec $f(z)=\frac{1}{1+z^3}$,

$$\begin{array}{l} Res(f,-1)=((z+1)f(z))\,|_{z=-1}=\frac{1}{3}, \\ Res(f,\frac{1+i\sqrt{3}}{2})=\Big((z-\frac{1+i\sqrt{3}}{2})f(z)\Big)\,|_{z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{(\frac{3+i\sqrt{3}}{2})(i\sqrt{3})}=\frac{2}{i\sqrt{3}(3+i\sqrt{3})}=-\frac{1+i\sqrt{3}}{6}. \end{array}$$

Alors $I=2i\pi Res(f,\frac{1+i\sqrt{3}}{2})+i\pi Res(f,-1)=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 2 (2 points - 5mn) : pour obtenir 11 on doit tirer 5 puis 6 ou 6 puis 5. Le tirage d'un chiffre sur le premier dé et d'un second sur le second a une probabilité 1/36 si les deux dés sont indépendants et équilibrés. La probabilité d'obtenir 11 est donc de 2/36.

Par contre celle d'obtenir 12 est de 1/36. Le chevalier de Méré avait donc tort de s'étonner.

Exercice 3 (2 points - 5mn) : F, H, CL, CC sont les quatre caractères. On cherche $\mathbb{P}(F|CL)=\mathbb{P}(F\cap CL)/\mathbb{P}(CL)=0.6\times 0.6/(0.4\times 0.1+0.6\times 0.6)=0.36/0.4=90\%$.

Exercice 4 (3 points - 10mn) : la FC d'une loi de Poisson de paramètre γ est $\Phi(t)=e^{\gamma(e^{it}-1)}$. La fonction caractéristique de la somme de variables indépendantes étant le produit de leurs FC, il vient

$$\Phi_{X+Y}(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}e^{\beta(e^{it}-1)}=e^{(\lambda+\beta)(e^{it}-1)},$$

et la fonction caractéristique caractérisant la loi, on en déduit que la loi de $X+Y$ est Poisson de paramètre $\lambda+\beta$.

Exercice 5 (3 points - 20mn) : si n électrons sont émis, Y est la somme de n variables aléatoires indépendantes chacune de loi de Bernoulli de paramètre p., i.e.

$$\mathbb{P}(Y=k|Z=n)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ \text{ si } n\geq k.$$

Donc Y prend des valeurs entières positives ou nulles et si $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(Y=k) & = & \sum_{n\geq k}\mathbb{P}((Y=k)\&(Z=n)) \\ & = & \sum_{n\geq k}\mathbb{P}(Y=k|Z=n)\mathbb{P}(Z=n) \\ & = & \sum_{n\geq k}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\ & = & \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}\sum_{n\geq k}\frac{(1-p)^{n-k}\lambda^{n-k}}{(n-k)!}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}. \end{array}$$

Donc Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

Exercice 5 (6 points - 40mn) :

a) si $\sigma\in\Omega$ alors $Y_i(\sigma)\in\{1,\ldots,i\}$ donc F est bien définie.

Si $F(\sigma)=F(\alpha)$, alors $Y_n(\sigma)=Y_n(\alpha)$, et puisqu'il s'agit pour l'un et l'autre du classement du prétendant $\sigma(n)$ (resp. $\alpha(n)$) dans l'ensemble de tous les prétendants, il s'ensuit que $\sigma(n)=\alpha(n)$.

On passe donc à $n-1$ prétendants (on enlève le numéro $\sigma(n)=\alpha(n)$), et on recommence le raisonnement précédent en partant de l'identité

$$(Y_1(\sigma),\ldots,Y_{n-1}(\sigma))=(Y_1(\alpha),\ldots,Y_{n-1}(\alpha)).$$

On déduit de même que les rangs des prétendants $\sigma(n-1)$ et $\alpha(n-1)$ parmi les prétendants $\{1,\dots,n\}\setminus\{\sigma(n)\}=\{1,\dots,n\}\setminus\{\alpha(n)\}$ sont identiques, autrement dit ils ont aussi le même numéro, soit $\sigma(n-1)=\alpha(n-1)$.

Et ainsi de suite de proche en proche. La récurrence se termine par $\sigma(1)=\alpha(1)$ se qui termine de démontrer l'identité $\alpha=\sigma$. Donc F *est injective.*

Pour montrer que F est surjective, on se donne $y=(y_1,\dots,y_n)\in\{1\}\times\{1,2\}\times\dots\times\{1,\dots,n\}$. On pose alors $\sigma(n)=y_n$, puis $\sigma(n-1)$ est le $y_{n-1}^{\text{ième}}$ parmi $\{1,\dots,n\}\setminus\{\sigma(n)\}$, puis $\sigma(n-2)$ est le $y_{n-2}^{\text{ième}}$ parmi $\{1,\dots,n\}\setminus\{\sigma(n-1),\sigma(n)\}$, etc : $\sigma(k)$ sera le $y_k^{\text{ième}}$ parmi $\{1,\dots,n\}\setminus\{\sigma(k+1),\dots,\sigma(n)\}$. On a ainsi trouvé $\sigma\in\Omega$ tel que $F(\sigma)=y$. Donc F *est surjective.*

Finalement F est bijective.

b) Clairement, $\mathrm{Card}(\Gamma)=n!$. Si $(y_1,\dots,y_n)\in\Gamma$,

$$\mathbb{P}((Y_1,\dots,Y_n)=(y_1,\dots,y_n))=\mathbb{P}(F^{-1}(\{(y_1,\dots,y_n)\})=1/n!$$

puisqu'on a choisi l'équidistribution sur Ω.

Du coup $\mathbb{P}((Y_1,\dots,Y_{n-1})=(y_1,\dots,y_{n-1}))=\sum_{y_n=1}^{n}\mathbb{P}((Y_1,\dots,Y_n)=(y_1,\dots,y_n))=n/n!=1/(n-1)!$, ..., $\mathbb{P}((Y_1,\dots,Y_k)=(y_1,\dots,y_k))=\sum_{y_{k+1}=1}^{k+1}\mathbb{P}((Y_1,\dots,Y_{k+1})=(y_1,\dots,y_{k+1}))=(k+1)/(k+1)!=1/k!$, $1\le k\le n-1$. Alors

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}(Y_k=y_k) & = & \sum_{\substack{(y_1,\dots,y_{k-1})\in\\ \{1\}\times\dots\times\{1,\dots,k-1\}}}\mathbb{P}((Y_1,\dots,Y_k)=(y_1,\dots,y_k))\\ & = & \mathrm{Card}(\{1\}\times\dots\times\{1,\dots,k-1\})\frac{1}{k!}=\frac{(k-1)!}{k!}\\ & = & \frac{1}{k}\end{array}$$

donc les Y_k sont équiréparties sur $\{1,\dots,k\}$.

Pour conclure, $\mathbb{P}((Y_1,\dots,Y_n)=(y_1,\dots,y_n))=\frac{1}{n!}=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(Y_k=y_k)$, et donc les variables $(Y_k)_{1\le k\le n}$ sont bien indépendantes.

c) $\tau_r(=\tau_r(\sigma))$ représente le numéro du premier prétendant apparaissant comme le meilleur alors que déjà $r-1$ prétendants ont été refusés par la princesse. S'ils sont tous moins bons que ceux qui sont déjà passés, alors $\tau_r=n+1$.

On cherche ensuite $\phi(r)$ ci-dessous, en utilisant l'indépendance et équirépartition des (Y_j) :

$$\begin{array}{rcl}\phi(r) & = & \mathbb{P}((Y_{\tau_r}=1)\&(Y_{\tau_r+1}>1)\&\dots\&(Y_n>1))\\ & = & \sum_{k=r}^{n}\mathbb{P}((Y_r>1)\&\dots\&(Y_{k-1}>1)\&(Y_k=1)\&(Y_{k+1}>1)\&\dots\&(Y_n>1))\\ & = & \sum_{k=r}^{n}\left(\prod_{t=r}^{k-1}\frac{t-1}{t}\right)\frac{1}{k}\left(\prod_{t=k+1}^{n}\frac{t-1}{t}\right)\\ & = & \frac{1}{n}\sum_{k=r}^{n}\frac{r-1}{k-1}\ (\text{on convient que } \frac{0}{0}=1).\end{array}$$

On sait que $\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\sim\ln(n)$ (se fait par un calcul intégrale en découpant en intervalles de longueur 1 pour la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$). On en déduit que

$$\phi(r)\sim_{n\to\infty}(r-1)\frac{\ln(n)}{n}.$$

La princesse peut chercher à maximiser τ_r si elle a une information sur n. Une programmation matlab de la fonction $n\mapsto\max_{r\le n}\tau_r$ révèle des choses intéressantes.