I : lors de 100 lancers du dé à 6 faces on observe les résultats suivants :

x	1	2	3	4	5	6
$N(x)$	20	13	17	12	23	15

Tester au niveau 5% que le dé n'est pas pipé.

II : on s'intéresse à la durée de vie de deux composants électroniques se trouvant sur un système solidaire. Si l'un des deux composants tombe en panne, le système tout entier doit être changé. Les durées de vie de ces deux composants sont modélisées par l'intermédiaire de variables aléatoires exponentielles de paramètres λ et μ indépendantes. On se donne deux échantillons indépendants $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ indépendants de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$.

On observe seulement la durée de vie de l'échantillon qui est tombé en panne soit le n échantillon iid $(Z_i, W_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $Z_i = \min\{X_i, Y_i\}$ et $W_i = 1$ si $Z_i = X_i$ et 0 si $Z_i = Y_i$.

1) Montrer que $\mathbb{P}(X_i = Y_i) = 0$ et donner les lois de Z_i et W_i.

2) Montrer que Z_i et W_i sont indépendantes (on pourra calculer $\mathbb{E}(f(Z_i)g(W_i))$ pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées).

Les variables Z_i et W_i étant indépendantes, la vraisemblance du n-échantillon $(Z_i, W_i)_{1\leq i\leq n}$ est connue. *On suppose désormais que μ est connue.*

3) Donner l'EMV $\hat{\lambda}_n$ de λ.

4) Montrer qu'il est fortement convergent.

5) Calculer son biais $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_n) - \lambda$ et en déduire que $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_n) \to \lambda$.

6) Vérifier que $\hat{\lambda}_n$ est asymptotiquement normal et que sa variance asymptotique est égale à l'inverse de l'information de Fisher.

7) Donner un intervalle de confiance bilatéral symétrique asymptotique de niveau $1 - \alpha$ pour λ.

8) Donner l'estimateur de maximum de vraisemblance $(\hat{\lambda}_n, \hat{\mu}_n)$ de (λ, μ).

III: on désire étudier la répartition des naissances suivant le type du jour dans la semaine (jours ouvrables ou week-end) et suivant le mode d'accouchement (naturel ou par césarienne). Les données proviennent du "National Vital Statistics Report" et concernent les naissances aux USA en 1997.

Naissances	*Naturelles*	*Cesar.*	*Total*
JO	2331536	663540	2995076
WE	715085	135493	850578
Total	3046621	799033	3845654

Naissances	*Naturelles*	*Cesar.*	*Total*
JO	60.6%	17.3%	77.9%
WE	18.6%	3.5%	22.1%
Total	79.2%	20.8%	100%

1) Tester au niveau 0.001 l'hypothèse d'indépendance entre le type du jour de naissance et le mode d'accouchement.

2) On désire savoir s'il existe une évolution significative par rapport aux données de 1996. Tester au niveau 0.001 si $p = p^0$ où p^0 correspond aux observations de 1996 :

Naissances	*Naturelles*	*Cesariennes*
JO	60.5%	17%
WE	18.9%	3.6%