I : on suppose que le nombre N de clients journaliers d'un grand magasin suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Chaque client a la possibilité de se faire voler son portefeuille et ce indépendamment des autres clients, ce que l'on modélise à l'aide d'une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ iid de loi commune $\mathcal{B}(p)$. On suppose N et $(X_i)_{i\geq 1}$ indépendantes.

1) Exprimer le nombre V de clients volés en fonction de N et des X_i.

2) Déterminer la loi de $(V, N-V)$. En déduire les lois marginales. Ces deux variables sont-elles indépendantes?

II: est-il possible de piper deux dés à six faces indépendants de sorte que leur somme soit uniformément répartie dans $\{2,\dots,12\}$?

III: au cours d'un jeu télévisé, un candidat tire au sort 2 enveloppes contenant respectivement les sommes x_1 et x_2 ($x_1 > x_2 > 0$), qu'il ne connaît pas. Après avoir examiné le contenu X de son enveloppe, il a le choix entre conserver ce contenu et effectuer un échange avec l'autre enveloppe. On veut étudier la stratégie suivante : on se donne T une variable exponentielle de paramètre 1 indépendante du tirage au sort et on change d'enveloppe si $T > X$.

Calculer la probabilité d'obtenir la somme la plus élevée x_1 en suivant cette stratégie. Est-elle supérieure ou inférieure à $\frac{1}{2}$? Trouvez-vous ce résultat intuitif?

IV: soit $(U_i)_{i\geq 1}$ une suite iid de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Soit $\alpha > 0$.

1) Montrer que la suite $X_n = (U_1 \dots U_N)^{\frac{\alpha}{n}}$ converge presque sûrement vers une limite que l'on décrira.

2) On pose $Y_n = e^{\alpha\sqrt{n}}(U_1 \dots U_n)^{\alpha\sqrt{n}}$. Quel est le comportement de $\frac{1}{\alpha}\ln(YN)$ lorsque $n \to \infty$? En déduire que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi et déterminer sa limite.

V: 1) Quelle est la valeur de p pour laquelle $Var(X)$ est maximale si $\mathbb{P}_X = \mathcal{B}(p)$?

2) Aux USA sur 4 000 000 de naissances annuelles on observe un ratio de 1048 garçons pour 1000 filles. Donner un intervalle de confiance de niveau 99% pour la probabilité p qu'un bébé soit un garçon. Que pensez-vous de l'hypothèse d'équilibre des naissances $H_0 = p = \frac{1}{2}$?

3) Au second tour de l'élection pr:'esidentielle, un sondage est effectué à la sortie des urnes sur un échantillon de 1000 personnes. Le candidat A receuille $a\%$ (a proche de 50) des suffrages des personnes interrogées. À l'aide du TLC, donner un intervalle de confiance de niveau 95% pour le score S_A réalisé par le candidat. À partir de quelle valeur de $|a-50|$ peut-on se baser sur le sondage pour connaître le résultat de l'élection au niveau de confiance de 95%?

VI: soit $(X_1,\dots,X_n)$ une suite iid d'espérance commune μ et de variance commune $\sigma^2 > 0$. Parmi les statistiques linéaires c'est à dire de la forme $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ avec $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, quel est l'estimateur sans biais de μ de variance minimale?

VII: dans l'industrie agro-alimentaire, on s'intéresse à la contamination du lait par un micro-organisme : les spores de clostridia. On souhaite estimer le nombre de spores dans $1ml$ de lait alors que l'on sait seulement déterminer si un tel échantillon contient ou non des spores. On note X_k le nombre de spores dans le $k^{\text{ième}}$ échantillon, et $Y_k = \mathbf{1}_{X_k=0}$. On note $S = \sum_{k=1}^n Y_k$ le nombre d'échantillons stériles. On suppose que la suite $(X_i)_{i\geq 1}$ est iid de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

1) Décrire les lois de Y_k et de S.

2) On note $q = \mathbb{P}_\lambda(Y_k = 1)$. Quel est l'estimateur de maximum de vraisemblance de q? En déduire un estimateur de λ.

3) Si l'on observe 6 tubes stériles sur 10, calculer les estimateurs précédents et donner des intervalles de confiance asymptotiques de niveau 95% pour q et λ.