I : on note Γ la fonction gamma d'Euler : $a > 0 \mapsto \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$. On vérifie facilement que

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),\ \Gamma(n) = (n-1)!.$$

La loi gamma de paramètres a et θ, notée $\Gamma(a,\theta)$, est la loi de densité

$$\frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x} \mathbf{1}_{x>0}.$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite iid de var de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $S_0 = 0$. On définit alors

$$N_t = \max\{n : S_n \leq t\},\ t \geq 0.$$

1a) Montrer que S_n et X_{n+1} sont indépendantes.
1b) Montrer que si $n \geq 1$, S_n suit une loi $\Gamma(n,\lambda)$ (convolution...).
1c) Montrer que pour tout $t > 0$ et $n \geq 0$, $\{N_t > n\} = \{S_{n+1} \leq t\}$.
1d) Si $n \geq 1$, montrer que $\mathbb{P}(S_n \leq t) = g_n(\lambda t)$, où

$$g_n(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t x^{n_1} e^{-x} dx.$$

1e) Montrer que $g_{n+1}(t) = -\frac{1}{\Gamma(n+1)} e^{-t} t^n + g_n(t)$.
1f) Montrer que $\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t)$.
1g) Montrer que pour tout $t > 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.
2a) Si U suit une loi $\mathcal{U}([0,1])$, quelle est la loi de $Y = -\ln(U)\ /\ \lambda$?
2b) Que fait le programme informatique suivant ?

```
N=0;S=0;
While S≤ 1
    U=rand;
    S=S-ln(U)/λ;
    N=N+1;
End;
Print N-1
```

II: montrer que si R suit une loi $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$ et θ une loi $\mathcal{U}([0,2\pi])$, alors

$$X = \sqrt{R}\cos\theta \text{ et } Y = \sqrt{R}\sin\theta$$

sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

III: en utilisant le théorème de dérivation de l'intégrale paramétrée, trouver une équation différentielle que satisfait la fonction caractéristique d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$. En déduire sa valeur.

IV: soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de var iid d'espérances 1 prenant deux valeurs $0 < a < 1 < b$ avec les probabilités respectives p et $1-p$ $(0 < p < 1)$. On note $Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

1) Montrer que si $x > 0$ et $x \neq 1$, alors $\ln(x) < x - 1$. En déduire que $\mathbb{E}(\ln(X_1)) < 0$. En étudiant le comportement de $\frac{1}{n}\ln(Y_n)$, montrer que Y_n converge *p.s.* vers une limite à préciser. Un joueur joue tous les jours le dixième de sa fortune à pile ou face avec un ami. Quelle est l'évolution de cette fortune au bout d'un temps très long?

2) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$. La suite Y_n converge-t-elle dans $\mathcal{L}^1$?