

SEATECH 1A 2014 Corrigé MIPS

I: la fonction f est continûment dérivable sauf sur $\{y = 0\}$, on calcule la matrice Jacobienne de f en $(0, 1, 2)$:

$$Jac(f, (0, 1, 2)) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial x^2+y^2}{\partial x} & \frac{\partial x^2+y^2}{\partial y} & \frac{\partial x^2+y^2}{\partial z} \\ \frac{\partial x/y}{\partial x} & \frac{\partial x/y}{\partial y} & \frac{\partial x/y}{\partial z} \\ \frac{\partial xyz}{\partial x} & \frac{\partial xyz}{\partial y} & \frac{\partial xyz}{\partial z} \end{array} \right)_{|(0,1,2)} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

II: on place les points sur un dessin et on ajoute retrace des aires de morceaux de triangles rectangles qui sont donc des motiés d'aires de rectangles: on calcule

$$Aire = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 4.$$

III:

1) $\mathbb{P}(N > m) = 1$ si $m \leq n - 1$ car il faut au moins n pièces distinctes pour compléter le puzzle.

2a): on prend $\Omega = \{1, \dots, n\}^m$ avec équiprobabilité, $\mathbb{P}(\{(i_1, \dots, i_m)\}) = \frac{1}{n^m}$. Alors $\mathbb{P}(A_{k_1}^m \cap \dots \cap A_{k_r}^m) = (1 - \frac{r}{n})^m$.

2b): pour que $N > m$, sachant que $m \geq n$, il faut et il suffit qu'il existe un entier $1 \leq i \leq n$ tel qu'en m tirages i ne soit pas sorti, c'est à dire que l'un des événements A_k^m se soit réalisé. CQFD.

2c): on applique la formule de Poincaré:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N > m) &= \mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k^m) \\ &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_r \leq n} \mathbb{P}(A_{k_1}^m \cap \dots \cap A_{k_r}^m) \\ &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_r \leq n} (1 - \frac{r}{n})^m \\ &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} C_n^r (1 - \frac{r}{n})^m. \end{aligned}$$

3): on calcule (on peut intervertir les indices de sommation car les termes sont positifs, c'est du Fubini pour la mesure de comptage produit si l'on veut):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N) &= \sum_{p \geq 0} p \mathbb{P}(N = p) \\ &= \sum_{p \geq 0} \sum_{m \geq 0} 1_{p > m} \mathbb{P}(N = p) \\ &= \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{p \geq 0} 1_{p > m} \mathbb{P}(N = p) \right) \\ &= \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{p \geq m+1} \mathbb{P}(N = p) \right) \\ &= \sum_{m \geq 0} \mathbb{P}(N > m). \end{aligned}$$

En substituant on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N) &= n + \sum_{m \geq n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k (1 - \frac{k}{n})^m \\ &= n + n \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_n^k (1 - \frac{k}{n})^n. \end{aligned}$$

4): $\mathbb{P}(N = m) = \mathbb{P}(N > m - 1) - \mathbb{P}(N > m)$.

5): $N = N_1 + \dots + N_n$.

6): si $X_1 = i$, alors $N_2 = m$ ssi $X_j = i$ tant que $j \leq m$ et $X_{m+1} \neq i$.

7): $\mathbb{P}(N_2 = m) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^m \left(\frac{n-1}{n}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^m, m \geq 1.$

8): pour que $N_2 = m_2$ et $N_3 = m_3$, il faut que pour $i \neq j$,

$$X_1 = \dots = X_{m_2} = i, X_{m_2+1} = j, X_{m_2+2}, \dots, X_{m_2+m_3+1} \in \{i, j\}, X_{m_2+m_3+1} \notin \{i, j\}.$$

Donc $\mathbb{P}(N_2 = m_2, N_3 = m_3) = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{j \neq i} \left(\frac{1}{n}\right)^{m_2} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^{m_3-1} \frac{n-2}{n} = (n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^{m_2} \frac{n-2}{2} \left(\frac{2}{n}\right)^{m_3}.$
On reconnaît le produit de la loi de N_2 par une autre loi qui est nécessairement celle de N_3 . Les deux variables sont donc indépendantes et

$$\mathbb{P}(N_3 = m) = \frac{n-2}{2} \left(\frac{2}{n}\right)^m, m \geq 1.$$

On voit que les lois de N_2 et N_3 sont bien géométriques de paramètres $\frac{1}{n}$ et $\frac{2}{n}$.

9): on continue le point précédent de proche en proche. On comprend bien en exprimant l'événement $\cap_{2 \leq t \leq k} \{N_t = m_t\}$ à l'aide des X_j , le calcul précédent s'étend sans problème et nous permet de déduire que les N_t sont indépendantes, et N_t est géométrique de paramètre $\frac{t-1}{n}$,

$$\mathbb{P}(N_t = m) = \frac{n-t+1}{t-1} \left(\frac{t-1}{n}\right)^m, m \geq 1.$$

10): on calcule classiquement que $\mathbb{E}(N_t) = \frac{n}{n-t+1}$, et ensuite

$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(N_1) + \dots + \mathbb{E}(N_n) = \sum_{i=1}^n \frac{n}{i}.$$

11): on rapproche les expressions obtenues en **10)** et **3)**. En simplifiant par n et en retranchant n on déduit la relation recherchée.