

Tous documents autorisés. Tout appareil électronique interdit. 2 points d'assiduité en TD

7 Mai 2012, de 9h à 11h. Les exercices sont indépendants les uns des autres. Les résultats non démontrés seront considérés comme non traités sauf pour le dernier exercice pour lequel il s'agit de répondre par vrai ou faux seulement.

Premier exercice - 20mn - 2 points. Soit $f(x, y) = yx^2 - \sin(x)y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Donner un développement limité de f à l'ordre 3 en $(0, 0)$ et examiner l'existence d'un éventuel extremum local de f en $(0, 0)$.

Second exercice - 20mn - 2 points. Montrer que l'aire de l'hexagone régulier inscrit dans le disque unité vaut $5 \cos(\frac{\pi}{5}) \sin(\frac{\pi}{5})$. Calculer le volume d'un cône droit de hauteur h et de base cet hexagone.

Troisième exercice - 20mn - 4 points. On se donne une v.a.r. X de loi de densité $f(x) = \frac{1}{x} \mathbf{1}_{[1, e]}(x)$. Décrire la loi de la v.a.r. $Y = \frac{1}{X}$.

Quatrième exercice - 20mn, extrait de la banque Arts et Métiers - DUT/BTS 2011 - 10 points. Un examen comporte 10 questions auxquelles il faut répondre par vrai ou faux. Si la réponse est juste, elle rapporte 1, sinon, elle fait perdre 1 point. Les candidats répondent tous aux dix questions. La note N obtenue, sur 10, se calcule par la formule

$$N = \max\{0, N_j - (10 - N_j) = 2N_j - 10\}, \text{ où } N_j \text{ est le nombre de réponses justes.}$$

L'ensemble des candidats se décompose en deux catégories, les candidats sérieux (événement S), et les non sérieux (\bar{S}). On suppose qu'en tirant au hasard un candidat, on a $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(\bar{S}) = \frac{1}{2}$. Pour un candidat sérieux, on considère que la probabilité pour qu'il donne une réponse juste à une question donnée est égale à $\frac{3}{4}$, dans le cas contraire, s'il n'est pas sérieux, on considère que cette probabilité vaut $\frac{1}{2}$. On considère aussi que la justesse de la réponse d'un candidat donné à l'une des dix questions est indépendante de la justesse de ses réponses aux autres questions.

Répondre obligatoirement par vrai ou faux aux questions suivantes en reportant vos réponses dans un tableau à dix lignes et deux colonnes :

- 1) Les notes possibles sont les entiers de 0 à 10. (± 1 point)
- 2) $\mathbb{P}_{\bar{S}}(N = 8) = \mathbb{P}(N = 8 | \bar{S}) = 10/2^{10}$. (± 1 point)
- 3) $\mathbb{P}_{\bar{S}}(N = 10) = 1/20$. (± 1 point)
- 4) $\mathbb{P}_{\bar{S}}(N = 0) = 1/2$. (± 1 point)
- 5) $\mathbb{P}_{\bar{S}}(N = 1) = 0$. (± 1 point)
- 6) Il est impossible qu'un candidat sérieux ait 0. (± 1 point)
- 7) $\mathbb{P}_S(N = 10) = 3^{10}/4^{10}$. (± 1 point)
- 8) $\mathbb{P}(N = 10) = (3^{10} + 2^{10})/(2 \times 4^{10})$. (± 1 point)
- 9) $\mathbb{P}_{N=10}(S) = 3^{10}/(3^{10} + 2^{10})$. (± 1 point)
- 10) La probabilité qu'un élève obtienne la note de 10 est $(\frac{3}{4})^{10} + (\frac{1}{2})^{10}$. (± 1 point)

Votre note sur cet exercice sera calculée selon la formule $N = \max\{0, 2N_j - 10\}$.