SS-Outils-ISITV -1A **Première session 2013**
Corrigé

Premier exercice .

$$Jac(f,(0,0,0)) = \begin{pmatrix} sh^{-1}y & \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} \\ y(1+\tan^2(xy)) & x(1+\tan^2(xy)) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{|(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Second exercice. Soit $g : [0,1[\mapsto \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

1) $g' = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$ donc g croît et admet un minimum de 1 en 0 et une asymptote d'équation $x = 1$. On observe que g'' est positive donc g convexe.

2) V est une région de révolution d'axe $(0z)$, on la trace facilement en faisant tourner la courbe de g de la question précédente autour de l'axe $(0z)$.

3) Pour calculer le volume de V on va passer en cylindriques (ρ,θ,z), dont le Jacobien vaut ρ. Le domaine en cylindriques correspondant est défini par $\{0 \leq z \leq g(\rho)\}$.

$$Vol(V) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_V(x,y,z)dxdydz = 2\pi\int_0^1 (\int_0^{g(\rho)} \rho dz)d\rho = \int_0^1 \rho g(\rho)d\rho = \frac{8\pi}{3},$$

la dernière intégration se faisant par parties de façon standard.

Troisième exercice. On note A l'évènement "le tube provient du fournisseur A", B s'il provient du fournisseur B, D s'il est défectueux, C s'il est conforme. L'énoncé nous dit alors que

$$\mathbb{P}(A\cap D) = 1\% \times 75\% = 0,75\%,\ \mathbb{P}(B\cap D) = 2\% \times 25\% = 0,5\%,$$
$$\text{et donc } \mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A\cap D) + \mathbb{P}(B\cap D) = 1,25\%.$$

a) $\mathbb{P}(A|C) = \mathbb{P}(A\cap C) \big/ \mathbb{P}(C) = 75\% \times 99\% \big/ 98,75\%$.

b) $\mathbb{P}(B|D) = \mathbb{P}(B\cap D) \big/ \mathbb{P}(D) = 25\% \times 2\% \big/ 1,25\% = 40\%$.

c) Non car sachant qu'un tube est défectueux, il y a 60% de chances pour qu'il provienne du fournisseur A.

Quatrième exercice. Si on note G pour "a géré", $\bar{G}$ sinon, et D pour "diplômé", et $\bar{D}$ sinon, l'énoncé nous dit que $Card(G) = 55$, $Card(D) = 35$, $Card(G\cap D) = 10$, et $Card(D\cap G) + Card(D\cap\bar{D}) + Card(\bar{G}\cap D) + Card(\bar{G}\cap\bar{D}) = 100$. On en déduit le tableau d'effectifs suivants :

	G	$\bar{G}$
D	10	25
$\bar{D}$	45	20

On en déduit les réponses :

a) $\mathbb{P}(D\cap\bar{G}) = 25\%$.

b) $\mathbb{P}((D\cap\bar{G})\cup(\bar{D}\cap G)) = 25\% + 45\% = 70\%$.

c) $\mathbb{P}(\bar{D}\cap\bar{G}) = 20\%$.

Cinquième exercice. Si on note X le nombre de pièces défectueuses du lot de 500 pièces, alors $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(500, 3\%)$. On fait une approximation normale de X : sa moyenne est 15 et sa variance $15 \times 97\% := \sigma^2$.

$$\mathcal{L}((X-15)/\sqrt{15\times 97\%}) \sim \mathcal{N}(0,1).$$

On note F la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$. On peut alors répondre en utilisant cette approximation :

a) $\mathbb{P}$(Moins de 1% de pièces défectueuses) $= \mathbb{P}(X > 5) \sim 1 - F((5-15)/\sigma)$.

b) $\mathbb{P}$(Plus de 5% de pièces défectueuses) $= \mathbb{P}(X > 25) \sim 1 - F((25-15)/\sigma)$.

Sixième exercice. On a $\mathbb{P}(0 \leq U \leq 1) = \mathbb{P}(0 \leq V \leq 1) = 1$. Notons F_U et F_V les fonctions de répartition respectives de U et de V. Alors si $t < 0$, $F_U(t) = F_V(t) = 0$, et si $t \geq 1$, $F_U(t) = F_V(t) = 1$. Considérons donc $0 \leq t \leq 1$. Alors

$$\begin{aligned}
F_U(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\min(x,y)\leq t} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)dxdy \\
&= \int_{\substack{[0,1]^2,\\ x\leq y}} \mathbf{1}_{[0,t]}(x)dxdy + \int_{\substack{[0,1]^2,\\ x>y}} \mathbf{1}_{[0,t]}(y)dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^y \mathbf{1}_{[0,t]}(x)dx\right) dy + \int_0^1 \left(\int_0^x \mathbf{1}_{[0,t]}(y)dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \min(t,y)dy + \int_0^1 \min(t,x)dx \\
&= \int_0^t ydy + \int_t^1 tdy + \int_0^t xdx + \int_t^1 tdx \\
&= 2t - t^2.
\end{aligned}$$

On voit donc que la loi de U a une densité égale à $2(1-u)\mathbf{1}_{[0,1]}(u)$. Passons au calcul pour F_V, qui est plus simple :

$$\begin{aligned}
F_V(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\max(x,y)\leq t} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)dxdy \\
&= \int_{[0,t]^2} dxdy \\
&= t^2.
\end{aligned}$$