ISITV, Première Année **MAT 2011**

Vendredi 8 Avril 2011, ISITV.

Tous documents autorsisés, durée 2h heures.

Appareils électroniques interdits.

Les questions et problèmes peuvent être traités indépendamment les uns des autres.

I : calculer au point $(1,1,1)$ la dérivée de

$$f : (x,y,z) \mapsto (\arctan(x), \frac{xy}{z}, e^{x+y+z}, \sin(x)).$$

II: calculer $I = \int_A \left(x^2 + 9y^2 + 16z^2\right)^{3/2} dxdydz$ où $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leq 1\}$ (*on pourra passer sur la sphère de centre* 0 *et de rayon* 1 *dans* $\mathbb{R}^3$*, puis passer en sphériques*).

III: un joueur dispose d'une planche divisée en casiers portant chacun un numéro. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; l'un des casiers porte le numéro 1, deux casiers portent le numéro 2, trois le numéro 3,..., n le numéro n.

On fait tomber au hasard une balle dans l'un des casiers (tous les casiers étant équiprobables).

1) Soit $1 \leq k \leq n$ un entier, déterminer la probabilité p_k pour que la balle tombe dans un casier portant le numéro k.

2) Si le numéro est pair, le joueur gagne 1 euro, sinon, il en perd 1. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur sur un lancer. Déterminer la loi de X, son espérance, et sa variance (*on pourra distinguer selon que* n *est pair ou impair*).

IV: soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soit $\{H_1, \dots, H_n\}$ une partition $\mathcal{B}$-mesurable de Ω. Montrer que quel que soit i, si $A \in \mathcal{B}$ et $\mathbb{P}(A) > 0$, alors

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j)} \quad (\textit{Formule de Bayes}).$$

On suppose qu'une maladie M affecte une personne sur mille dans une population donnée. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 99% lorsque la maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient aussi un résultat faussement positif pour $0,2\%$ des personnes saines testées. Quelle est alors la probabilité pour qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif ?

V: soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois géométriques de paramètres p et q. On pose $Z = \min\{X, Y\}$.

1) Déterminer les fonctions de répartition de X, Y et Z.

2) En déduire la loi de Z.

VI: soient $(Y_n)_{n\geq1}$ et $(Z_n)_{n\geq1}$ deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes et de lois communes la loi uniforme sur $[0,1]$.

1) Déterminer le comportement lorsque $n \to +\infty$ de la suite de terme général $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_i+Z_i\leq1\}}$.

2) Notons $M_n = \max\{Y_1, \dots, Y_n\}$. Déterminer la loi de M_n puis montrer que M_n converge en probabilité vers 1.