ISITV, Première Année MAT 2011, Rattrapage Jeudi 19 Mai 2011, 14h, ISITV.

Tous documents autorsisés, durée 2h heures.
Appareils électroniques interdits.
Les calculs numériques dans les exercices IV et V ne sont pas demandés.

I. Dérivation : calculer au point $(0, 0, 1, 2)$ la dérivée de

$$f : (x, y, z, t) \mapsto (\arctan(xt), \frac{xy}{zt}, \mathrm{argsh}(y)).$$

II. Volume : on considère une quille constituée d'une sphère pleine dont le rayon vaut R, et d'un cône droit de hauteur h, $h > R$, pointant au centre de la sphère, et d'ouverture angulaire en sa pointe égale à 2γ, avec $\gamma \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Déterminer le volume V de cette quille, en fonction de R, γ et h.

III: . **Baccalauréat** : un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher, dont 7 sont blancs numérotés de 1 à 7, et 3 sont vert clair numérotés de 8 à 10. On tire simultanément deux jetons du sac.

1) On note A l'évènement "*obtenir deux jetons blancs*". Calculer la probabilité de A.

2) On note B l'évènement "*obtenir deux jetons portant des numéros impairs*". Calculer la probabilité de B.

3) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

4) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus pour ce tirage simultané. Déterminer sa loi, son espérance et sa variance.

IV. Accès internet : un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 5000 abonnés. A un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés être indépendants les uns des autres.

1) On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t. Quelle est la loi de X? Quelle est son espérance, son écart type ?

2) On pose $Y = (X - 1000) \,/\, \sqrt{800}$. Justifier précisément que l'on peut approcher la loi de Y par la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

3) Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant t soit inférieure à $2,5\%$. En utilisant l'approximation précédente, proposer une méthode permettant de déterminer ce nombre.

V. Surbooking : il arrive assez souvent que le nombre de réservations pour une liaison aérienne soit supérieur au nombre de passagers se présentant au guichet le jour du vol. Cela est dû à des empêchements imprévisibles de certains passagers et à une politique systématique de certains d'entre eux qui réservent des places sur plusieurs vols de façon à choisir au dernier moment celui qui leur convient le mieux. Ils ne sont pas pénalisés pour cela.

Pour compenser ce phénomène, une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation (*surbooking*) en prenant pour chaque vol un nombre $n > 300$ de réservations. S'il se présente plus de 300 passagers à l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.

1) On considère que les passagers sont mutuellement indépendants et que la probabilité de désistement de chacun d'eux est de 10%. On note n le nombre de réservations prises par la compagnie et S_n le nombre aléatoire de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol. Donner sa loi, son espérance et sa variance.

2) Le directeur commercial de la compagnie aimerait connaître la valeur maximale de n telle que $\mathbb{P}(S_n \leq 300) \leq 0,99$. A l'aide d'une approximation utilisant le théorème de la Limite Centrale (TCL), proposer une solution approchée au problème posé par le directeur commercial.