I. Dérivation : on calcule la matrice Jacobienne au point voulu :

$$Jac(f)_{|(0,0,1,2)} = \begin{pmatrix} \frac{t}{1+x^2t^2} & 0 & 0 & \frac{x}{1+x^2t^2} \\ \frac{y}{zt} & \frac{x}{zt} & -\frac{xy}{z^2t} & -\frac{xy}{zt^2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{|(0,0,1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II. Volume : le volume se décompose en la somme de celui de la sphère et du cone, moins le volume du secteur angulaire de la sphère d'ouverture γ et de révolution.

Le cone a une base cxirculaire de rayon $r(\gamma) = h\tan(\gamma)$, son volume vaut *base*$\times$*hauteur* / 3, *soit* $V_c = \frac{\pi h^3 \tan^2(\gamma)}{3}$.

La sphère a un volume $V_s = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Pour le volume du secteur angulaire d'ouverture γ *pointant au centre de la sphère,* V_-*, on passe en sphériques de Jacobien* $\rho^2\cos\phi$*, et on obtient*

$$V_- = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos(\phi) d\phi d\theta d\rho = \frac{2\pi(1-\cos\gamma)R^3}{3}.$$

Au final, on obtient

$$Volume\ quille = V_s + V_c - V_-.$$

III: . **Baccalauréat** *: on va appliquer la formule classique, nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles :*

1) $\mathbb{P}(A) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$.

2) $\mathbb{P}(B) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{9}$.

3) On calcule $\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15} \neq \frac{2}{9}\frac{7}{15}$. *Donc les évènements ne sont pas indépendants.*

4) C'est une variable aléatoire discrète qui prend ses valeurs dans $\{0,1,2\}$*. On a déjà calculé que* $\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(A) = \frac{7}{15}$*. Ensuite,* $\mathbb{P}(X=0) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15}$*. Pour finir* $\mathbb{P}(X=1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=2) = \frac{7}{15}$.

On en déduit $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X=1) + 2\mathbb{P}(X=2) = \frac{21}{15} = \frac{3}{2}$.

Puis $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{P}(X=1) + 4\mathbb{P}(X=2) = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$.

Pour finir $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{7}{3} - \frac{9}{4} = \frac{1}{12}$.

IV. Accès internet.

1) On reconnaît que X *est la somme de* 5000 *variables indépendantes identiquement distribuées de loi commune la loi de Bernoulli de paramètre* 0.2*. Donc la loi de* X *est binomiale de paramètres* 5000 *et* 0.2*,* $B(5000, 0.2)$*. Son espérance vaut donc* $5000\times 0.2 = 1000$ *et sa variance vaut* $5000\times 0.2\times 0.8 = 800$.

2) Par le Théorème Limite Centrale, appliqu au cas particulier d'une loi commune de Bernoulli de paramètre p*, si* X_N *est la somme de* N *variables aléatoires indépendantes distribuées selon cette loi,* $\frac{X_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \to \mathcal{N}(0,1)$ *en loi. Donc ici, considérant que* $5000 >> 1$*, on peut approcher la loi de la variable* Y *par une loi* $\mathcal{N}(0,1)$.

3) Le fournisseur est saturé lorsque le nombre d'abonnés connectés l'instant t dépasse le nombre disons S *de connexions simultanées possibles au serveur. Il est donc saturé si* $X > S$ *ou encore si* $U = (S-1000)/\sqrt{800}$*,* $Y > U$*. On cherche donc* U *pour que*

$$\mathbb{P}(Y \leq U) = F(U) = 97,5\%,$$

où F désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour information, $U = 1.96$, soit $S = 1000 + \sqrt{800} \times 1.96 = 1055.43$. Donc en-dessous de 1055 connexions simultanées possibles, les chances de stauration du réseau à un instant t sont supérieures à 2.5%.

V. Surbooking.

1) La variable S_n suit une loi binomiale de paramètres n et 0.9. Son espérance vaut donc $0.9 \times n$ et sa variance $0.09 \times n$.

2) On suppose que $\frac{S_n - 0.9\times n}{\sqrt{0.09\times n}}$ suit à peu près une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Comme $S_n \leq 300 \Leftrightarrow \frac{S_n - -0.9\times n}{\sqrt{0.09\times n}} \leq \frac{300-0.9\times n}{\sqrt{0.09\times n}} = z_n$, il suffit de déterminer n tel que $F(z_n) = 0.99$ où F est encore la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Les tables donnent $z_n = 2,326$ et on résoud une équation du second degré en $\sqrt{n}$. On trouve $n = 319$.