ISITV, Première Année **MAT 2011**

Vendredi 8 Avril 2011, ISITV.

Corrigé.

I : la dérivée de f s'exprime par le biais de sa Jacobienne :

$$Df_{(1,1,1)} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{(1,1,1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ e^3 & e^3 & e^3 \\ \cos(1) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II: on passe d'abord de l'ellipsoïde à la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ en posant $(x, y, z) = (u, 3v, 4w)$, puis on passe en sphériques en posant $(u, v, w) = (\rho\cos\theta\cos\phi, \rho\sin\theta\cos\phi, \rho\sin\phi)$ avec $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, et $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.

Le Jacobien du premier changement de variable vaut 12 ($= det(Diag(1, 3, 4))$) et celui du second vaut $\rho^2\cos(\phi)$ (cf. cours et TD). Alors

$$I = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 12\rho^5 \cos\phi d\phi)d\theta)d\rho = 8\pi.$$

III:

1) on compte le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles, soit

$$p_k = \frac{k}{n(n+1)/2} = \frac{2k}{n(n+1)}.$$

2) $X = \mathbf{1}_{k \text{ pair}} - \mathbf{1}_{k \text{ impair}}$. La variable X prend deux valeurs, ± 1, elle est donc discrète, et la détermination de sa loi revient à déterminer $\mathbb{P}(k \text{ pair})$ et $\mathbb{P}(k \text{ impair}) = 1 - \mathbb{P}(k \text{ pair})$.

$$\mathbb{P}(k \text{ pair}) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n/2} p_{2k} = \frac{4}{n(n+1)}\frac{1}{2}\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1) = \frac{n+2}{2(n+1)} \text{ si } n \text{ pair;} \\ \sum_{k=1}^{(n-1)/2} p_{2k} = \frac{4}{n(n+1)}\frac{1}{2}\frac{n-1}{2}(\frac{n-1}{2}+1) = \frac{n-1}{2n} \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Il en résulte que

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(k \text{ pair}) - \mathbb{P}(k \text{ impair}) = 2\mathbb{P}(k \text{ pair}) - 1 = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \text{ si } n \text{ pair;} \\ -\frac{1}{n} \text{ si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

On observe ensuite que $X^2 = 1$ donc $\mathbb{E}(X^2) = 1$ et donc $Var(X) = 1 - \mathbb{E}(X)^2$, soit

$$Var(X) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \text{ si } n \text{ pair;} \\ 1 - \frac{1}{n^2} \text{ sinon.} \end{cases}$$

IV: on observe que puisque (H_i) partitionne Ω, on a

$$\mathbf{1}_A = \sum_i \mathbf{1}_{A\cap H_i},$$

soit en intégrant,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_i \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i),$$

et donc dans la formule annoncée on constate que le produit du terme de gauche par le dénominateur de celui de droite vaut $\mathbb{P}(A \cap H_i)$, ce qui est bien la valeur du numérateur du terme de droite. CQFD.

Appelons M l'évènement "malade", $\bar{M}$ l'évènement complémentaire, et T^+ l'évènement "test positif", et T^- l'évènement contraire. L'énoncé nous dit alors que

$$\mathbb{P}(M) = 1/1000,\ \mathbb{P}(T^+|M) = 0,99,\ \mathbb{P}(T^+|\bar{M}) = 0,002.$$

On applique alors la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(M|T^+) = \frac{\mathbb{P}(T^+|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T^+|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T^+|\bar{M})\mathbb{P}(\bar{M})} = \frac{0,99.0,001}{0,99.0,001 + 0,002.0,999} \approx \frac{1}{3}.$$

V:

1 et 2) La loi de X distribue les charges $(1-p)p^n$ aux entiers $n \geq 0$, pour Y, c'est $(1-q)q^n$. Donc

$$F_X(t) = \mathbf{1}_{t\geq 0}(1 - p^{[t]+1}),\ F_Y(t) = \mathbf{1}_{t \geq 0}(1 - q^{[t]+1}).$$

En utilisant l'indépendance de X et de Y, on peut calculer $F_Z(t)$ par le complémentaire :

$$F_Z(t) = 1 - \mathbb{P}(\min\{X, Y\} > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t \text{ et } Y > t) = 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t)),$$

et si l'on regade de plus près cette dernière quantité, on s'aperçoit qu'elle est nulle si $t < 0$ et sinon vaut $1 - p^{[t]+1}q^{[t]+1} = 1 - (pq)^{[t]+1}$, ainsi, on reconnaît que la loi de Z est une loi géométrique de paramètre pq.

VI:

1) La suite $(\mathbf{1}_{Y_i+Z_i\leq 1})_{i\geq 1}$ est indépendante identiquement distribuée, et sa loi commune, celle de $\mathbf{1}_{Y_1+Z_1\leq 1}$, est Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_1 + Y_1 \leq 1)$, qui est son espérance. Elle est donc intégrable, et par la loi forte des grands nombres, on aura

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{Y_k+Z_k\leq 1} \to \mathbb{P}(X_1 + Y_1 \leq 1).$$

Reste à calculer $\mathbb{P}(X_1 + Y_1 \leq 1)$. Pour cela passons à la loi du couple (X_1, Y_1), qui a la densité $\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)$ (produit des densités par indépendance) : alors

$$\mathbb{P}(X_1 + Y_1 \leq 1) = \int_{x+y\leq 1} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)dxdy = \int_0^1 (\int_0^{1-y} dx)dy = \frac{1}{2}.$$

2) $\mathbb{P}(M_n \leq t) = \mathbb{P}(\cap_{k=1}^n \{Y_k \leq t\}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(Y_k \leq t) = \mathbb{P}(Y_1 \leq t)^n$ par indépendance et distribution identique. La fonction de répartition de Y_1 est bien connue, et vaut 0 si $t \leq 0$, t si $0 \leq t \leq 1$, et 1 sinon. Comme les $Y_k \in [0,1]$, $M_n \in [0,1]$, et donc pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|M_n - 1| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(M_n \leq 1 - \varepsilon) = \begin{cases} 0 \text{ si } \varepsilon \geq 1; \\ (1-\varepsilon)^n \text{ sinon.} \end{cases}$$

Donc quel que soit $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|M_n - 1| \geq \varepsilon) \to 0$. CQFD.