

À rendre le Vendredi 24 Octobre à 10 heures

I : dans une étude proposant un modèle pour l'occurrence de jours de pluie et jours secs à Tel Aviv durant la période pluvieuse de Décembre à Janvier, les données collectées sur 27 ans ont donné le tableau suivant :

<i>jour d'avant / jour actuel</i>	<i>sec</i>	<i>pluie</i>	<i>total</i>
<i>sec</i>	1049	350	1399
<i>pluvieux</i>	351	687	1038

Le modèle de chaîne de Markov proposé au vu des observations réalisées pour la transition en période pluvieuse d'un jour à l'autre est basé sur la matrice des fréquences observées de transitions, qui donne le noyau de la chaîne p ,

$$p = \begin{pmatrix} 0.750 & 0.250 \\ 0.338 & 0.662 \end{pmatrix}.$$

- a) Trouver la loi invariante ν de la chaîne.
- b) Un cycle météo est défini comme un enchaînement d'une période sèche suivie d'une période de pluie. Montrer que la longueur moyenne d'un cycle est de 7 jours.

II: deux urnes contiennent chacune a boules, blanches dans la première, noires dans la seconde. À chaque étape, on choisit au hasard une boule dans chaque urne (les boules sont indiscernables), et on remet les boules tirées en échangeant leurs urnes de départ.

- a) On note X_n le nombre de boules blanches de la première urne, après n échanges. Calculer la loi de X_{n+1} en fonction de X_n .
- b) En déduire que $(X_n)_{n \geq 0}$ est Markov sur l'espace d'état $\{0, 1, \dots, a\}$, décrire son noyau.
- c) Montrer qu'elle est apériodique. Calculer la mesure invariante de la chaîne pour $a = 2$.