

Corrigé

I :

a) Le noyau de la chaîne est positif donc elle est irréductible apériodique. Pour trouver la mesure invariante on résoud $z = (x, y)$, $x, y \geq 0$, $x + y = 1$ et $zp = z$ ce qui donne

$$\nu = (0.5748, 0.4252) = (\nu(D), \nu(W)),$$

où D désigne “*sec*” (Dry) et W désigne “*pluvieux*” (Wet).

b) L'apparition d'un cycle de longueur $\ell = d + w$ dans la chaîne $(X_n)_{n \geq 0}$ de loi initiale ν et de noyau p , où $X_n \in \{D, W\}$, correspond à un événement du type $\{X_{n-1} = W, X_n = D, \dots, X_{n+d-1} = D, X_{n+d} = W, \dots, X_{n+d+w-1} = W, X_{n+d+w} = D\} := [WD^dW^wD]$, ou du type $\{X_0 = D, \dots, X_{d-1} = D, X_d = W, \dots, X_{d+w-1} = W, X_{d+w} = D\} := [D^dW^wD]$. La loi de la chaîne homogène impose que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([WD^dW^wD]) &= \nu(W)p(W, D)p(D, D)^{d-1}p(D, W)p(W, W)^{w-1}p(W, D), \\ \mathbb{P}([D^dW^wD]) &= \nu(D)p(D, D)^{d-1}p(D, W)p(W, W)^{w-1}p(W, D),\end{aligned}$$

$$\text{avec } p = \begin{pmatrix} p(D, D) & p(D, W) \\ p(W, D) & p(W, W) \end{pmatrix}$$

L'espérance de la longueur $\ell = d + w$ d'un cycle s'écrit donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\ell) &= \sum_{d,w \geq 1} (d+w)(\nu(D)p(D, W)p(W, D) + \nu(W)p(W, D)^2p(D, W))p(D, D)^{d-1}p(W, W)^{w-1} \\ &= p(W, D)p(D, W)(\nu(D) + \nu(W)p(W, D)) \\ &\quad \times \sum_{d \geq 1} \left[p(D, D)^{d-1} \left(d \sum_{w \geq 1} p(W, W)^{w-1} + \sum_{w \geq 1} wp(W, W)^{w-1} \right) \right] \\ &= p(W, D)p(D, W)(\nu(D) + \nu(W)p(W, D)) \\ &\quad \times \sum_{d \geq 1} \left[dp(D, D)^{d-1}/p(W, D) + p(D, D)^{d-1}/p(W, D)^2 \right] \\ &= p(W, D)p(D, W)(\nu(D) + \nu(W)p(W, D)) \\ &\quad \times \left[1/(p(D, W)^2p(W, D)) + 1/(p(D, W)p(W, D)^2) \right] \\ &= (\nu(D) + \nu(W)p(W, D))(p(W, D) + p(D, W))/(p(W, D)p(D, W)) \\ &= 5.\end{aligned}$$

II: notons B_n^1 la couleur de la boule tirée de l'urne 1 au $n^{\text{ième}}$ tirage, et B_n^2 celle tirée de l'urne 2. Alors $B_n \in \{B, N\}$.

a) Bien entendu $X_0 = a$, et ensuite

$$X_{n+1} = \begin{cases} \text{cas 1 : } X_n & \text{si } B_{n+1}^1 B_{n+1}^2 \in \{BB, NN\}; \\ \text{cas 2 : } X_n - 1 & \text{si } B_{n+1}^1 B_{n+1}^2 = BN; \\ \text{cas 3 : } X_n + 1 & \text{si } B_{n+1}^1 B_{n+1}^2 = NB. \end{cases}$$

Le cas 1 se produit avec probabilité $\frac{X_n}{a} \frac{a-X_n}{a} + \frac{a-X_n}{a} \frac{X_n}{a} = 2 \frac{X_n(a-X_n)}{a^2}$.

Le cas 2 se produit avec probabilité $\frac{X_n}{a} \frac{X_n}{a} = \left(\frac{X_n}{a}\right)^2$.

Le cas 3 se produit avec probabilité $\frac{a-X_n}{a} \frac{a-X_n}{a} = \left(\frac{a-X_n}{a}\right)^2$.

b) De ce qui précède on déduit que X_{n+1} ne dépend que de X_n et la transition est indépendante de n donc la chaîne est de Markov homogène d'espace d'états $\{0, 1, \dots, a\}$, de loi initiale $\nu_0 = (0, \dots, 0, 1)$, de noyau p décrit par

$$p(x, x) = 2 \frac{x(a-x)}{a^2}, \quad p(x, x-1) = \frac{x^2}{a^2}, \quad p(x, x+1) = \frac{(a-x)^2}{a^2}.$$

c) Pour $a = 2$ le noyau s'écrit

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $p^2 > 0$ donc la chaîne est irréductible apériodique et admet une unique mesure invariante. On calcule avec matlab

$$p^{100} = \begin{pmatrix} 0.1667 & 0.6667 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.6667 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.6667 & 0.1667 \end{pmatrix}$$

ce qui suggère la mesure invariante $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ dont on vérifie a posteriori qu'elle convient. Sinon on résoud le système.