Université de Picardie Jules Verne

Année 2002/2003
Faculté de MathInfo
Licence de Mathématiques
Premier semestre
UV LM7

COURS DE VARIABLE COMPLEXE

Professeur Y. Lacroix

Extrait de l'encyclopédie hachette multimédia, version 2001 :

Augustin Louis, baron Cauchy. "Mathématicien français (Paris, 1789 Sceaux, 1857). Augustin Louis Cauchy est né à Paris quelques semaines après la prise de la Bastille. Son père, Louis François Cauchy, avocat au parlement de Normandie et secrétaire de l'intendant de Haute-Normandie jusqu'en 1785, avait suivi ce dernier à Paris et avait échappé à la guillotine en 1794 en se retirant à Arcueil".

"... La partie la plus importante et la plus originale de l'oeuvre de Cauchy est sa théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe. En1825, il fonde la théorie des fonctions de la variable complexe au moyen de l'intégrale prise entre deux limites complexes dans son "*Mémoire sur des intégrales définies prises entre des limites imaginaires*", et fait de cette idée un outil très puissant pour résoudre de nombreux problèmes : calcul d'intégrales définies, développements en série, représentation de solutions d'équations différentielles, etc".

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[AA] : J. Avignat et E. Azoulay, "*Compléments d'analyse*", Edisciences International (1994).
[C] : H. Cartan, "*Théorie élémentaire des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes*", Collection Enseignement des Sciences, 1, Hermann Editeur.
[C] : S. D. Chatterji, "*Cours d'analyse, 2. Analyse complexe*", Presses polytechniques et universitaires romandes (1997).
[P] : J.-F. Pabion, "*Elémenst d'analyse complexe, Licence de Mathématiques*", Ellipses (1995).
[R] : W. Rudin, "*Analyse réelle et complexe*", Masson (1987).

Et bien d'autres... .

Chapitre 1 : fonctions holomorphes

Nous étudions dans ce chapitre les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$, avec $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, et telles qu'en $a \in \Omega$,

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existe. Nous verrons que ces fonctions ont des propriétés fortes d'analycité.

1.1 : dérivation complexe.

Quelques notations et notions de bases sont nécessaires pour commencer.

Espace topologique (X, Θ) : c'est un couple où X est un ensemble et $\Theta \subset \mathcal{P}(X)$ est un sous-ensemble de parties de X, appelées les ouverts de la topologie, et tels que $\emptyset, X \in \Theta$, $O_1, O_2 \in \Theta \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \Theta$, et $(O_i)_{i \in I} \in \Theta^I \Rightarrow \cup_{i \in I} O_i \in \Theta$.

Par exemple, l'ensemble des unions quelconques d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ muni $\mathbb{R}$ d'une topologie (dite euclidienne). Aussi, l'ensemble des unions quelconques de disques ouverts dans le plan complexe muni $\mathbb{C}$ d'une topologie (**euclidienne**, encore).

Si $r > 0$ et si $a \in \Omega$, notons

$$D(a, r) = \{z : |z - a| < r\} \ \ (\text{resp.} \ \ \bar{D}(a, r) = \{z : |z - a| \leq r\})$$

le **disque ouvert (resp. fermé)** de centre a et de rayon r du plan complexe. Notons $D'(a, r) = D(a, r) \setminus \{a\} = \{z : 0 < |z - a| < r\}$ le **disque ouvert épointé**.

Dans ce cours, $\mathbb{C}$ sera muni de sa topologie euclidienne. Donc un ouvert est une union de boules ouvertes. On démontre sans peine (exercice) qu'un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ est ouvert si et seulement si quel que soit $x \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $D(x, r) \subset \Omega$. Le LM4 développera ces notions plus en détails.

Rappelons qu'un sous-ensemble $E \subset X$ d'un espace topologique X est **connexe** s'il n'existe pas deux ouverts U et V tels que $E \subset U \cup V$, $E \cap U \neq \emptyset$, $E \cap V \neq \emptyset$, et $E \cap U \cap V = \emptyset$.

Dans la suite de ce cours, Ω désignera un ouvert du plan.

Définition 1.1.1. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$. Nous dirons que f* **est dérivable en** *z_0 si la limite suivante, notée $f'(z_0)$, existe :*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Si ceci est vrai pour chaque $z_0 \in \Omega$, nous dirons que f est **holomorphe** *sur Ω.*

Nous noterons $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Remarque. *Il ne faut pas confondre la dérivabilité en z_0 et la différentiabilité en z_0, si nous identifions $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. La dérivabilité entraîne la différentiabilité, mais la réciproque est fausse. Cf. infra avec les équations de Cauchy.*

Voici quelques propriétés de base de la dérivabilité (et de l'holomorphie, donc) :

PROPOSITION 1.1.2. *Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ dérivables en z_0 (resp. holomorphes sur Ω). Alors $f+g$ et fg le sont, et*

$$(f+g)' = f' + g', (fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

Si en outre g ne s'annule pas en z_0, $f \,/\, g$ est holomorphe en z_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Donc f/g est holomorphe sur $\Omega \setminus g^{-1}(\{0\})$ si f et g le sont sur Ω.

Supposons que $f \in H(\Omega)$, que $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ soit ouvert, que $g \in H(\Omega_1)$, et qu'enfin $f(\Omega) \subset \Omega_1$. Alors la composée $g \circ f \in H(\Omega)$, et

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

PREUVE. Ajouter les limites pour la somme, et utiliser la formule $xy - ab = (x - a)y + a(y - b)$ pour le produit, en remarquant que la dérivabilité entraîne la continuité. Montrer que $1/g$ est dérivable en z_0 et a pour dérivée $\frac{-g'(z_0)}{g(z_0)^2}$, puis appliquer la formule produit.

Pour la composée, la preuve s'inspire aussi du cas réel, issu du Deug. Transcrivons le contenu de l'assertion "*les limites existent*" : notons $w_0 = f(z_0)$. Alors il existe $\varepsilon : \Omega \to \mathbb{C}$ et $\eta : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ telles que $\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0$ et $\lim_{w \to w_0} \eta(w) = 0$, et que

$$\begin{array}{rcl} f(z) - f(z_0) & = & (f'(z_0) + \varepsilon(z))(z - z_0) \\ g(w) - g(w_0) & = & (g'(w_0) + \eta(w))(w - w_0). \end{array}$$

Pour conclure remarquer que

$$\frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0} = [g'(f(z_0)) + \eta(f(z))]\,[f'(z_0) + \varepsilon(z)],$$

et utiliser "*dérivable entraîne continue*". $\square$

Y-a-t-il des fonctions holomorphes??? Oui. Tout ce qui est polynôme de la variable complexe, à coefficients complexes, l'est dans le plan, les calculs de dérivées coïncident avec ceux du deug pour ce qui est du cas réel. De même pour les fractions rationnelles en la variable complexe, à condition d'être bien définies (par exemple $z \to \frac{1}{z} \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ (vérifer au passage que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ est un ouvert-connexe...)).

1.2 : analycité.

Proposition - Définition 1.2.1. *Soient $a \in \mathbb{C}$ et $(c_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Considérons la* **série entière**

$$\sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n.$$

Nous admettrons que lui correspond un unique $R \in [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$, appelé son **rayon de convergence**, *tel que la série converge absolument et uniformément sur $\bar{D}(a,r)$ si $0 \leq r < R$, et diverge à l'extérieur de $\bar{D}(a,R)$.*

Son rayon de convergence est donné par la formule d'Hadamard (d'autres l'appellent de Cauchy) :

$$\frac{1}{R} = \limsup_n |c_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Nous dirons que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est **développable en série entière en** *$a \in \Omega$ si il existe $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Omega$ et qu'il existe une série entière $\sum_n c_n(z-a)^n$ de rayon de convergence $R > r$ qui converge vers $f(z)$ pour tout $z \in D(a,r)$.*

Nous dirons que f est **analytique** *sur Ω si f est développable en série entière en tout point de Ω.*

Théorème 1.2.2. "Analytique entraîne holomorphe". *Si f est analytique dans Ω alors $f \in H(\Omega)$ et f' est analytique dans Ω. Et donc une fonction analytique est indéfiniment dérivable et ses dérivées sont analytiques.*

De fait, si l'on développe f en série entière conformément à la définition **1.1.3.**, *si*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n \text{ pour } z \in D(a,r), \text{ alors } f'(z) = \sum_{n\geq 1} nc_n(z-a)^{n-1} \text{ pour } z \in D(a,r).$$

Preuve. La fonction f étant analytique, si $a \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Omega$, et il existe une série entière $S(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$ de rayon de convergence $R > r$ telle que $f = S$ sur $D(a,r)$. Alors le critère d'Hadamard montre que la série $T(z) = \sum_{n\geq 1} nc_n(z-a)^{n-1}$ a le même rayon de convergence que le série S, et donc converge absolument uniformément dans $\bar{D}(a,r)$.

Pour simplifier nous pouvons supposer que $a = 0$, sans altérer la généralité de la preuve. Soit $w \in D(0,r)$ et soit $\rho > 0$ tel que $|w| < \rho < r$. Si $z \neq w$, alors par convergence simple des séries impliquées,

$$\frac{S(z)-S(w)}{z-w} - T(w) = \sum_{n\geq 1} c_n \left[\frac{z^n - w^n}{z-w} - nw^{n-1}\right].$$

Le terme correspondant à $n = 1$ ci-dessus est nul, et il vaut $(z-w)\sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1}z^{n-k-1}$ si $n \geq 2$. Si $n \geq 2$ et si en plus $|z| < \rho$, alors en module, ce terme ne dépasse pas $|z-a|\frac{n(n-1)}{2}\rho^{n-2}$, et donc pour un tel z,

$$\left|\frac{S(z)-S(w)}{z-w} - g(w)\right| \leq |z-w| \sum_{n\geq 2} n^2|c_n|\rho^{n-2}.$$

La série de gauche ci-dessus converge (critère de Hadamard), et donc, si $z \to w$, on a $\frac{S(z)-S(w)}{z-w} \to T(z)$, et puisque f coïncide avec S localement, nous en déduisons que f' existe et vaut T. $\square$

Nous verrons au Chapitre 4 que la réciproque est vraie : toute holomorphe sur un ouvert y est analytique.

1.3. Dérivabilité et différentiabilité.

Une $f : \Omega \to \mathbb{C}$ peut être interprétée comme une $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, et de ce fait, il est naturel de tenter de rapprocher la notion de différentiabilité de celle de dérivation complexe que nous venons d'aborder.

Cette f sera différentiable en $z_0 \in \Omega$ si il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire Df_{z_0} de $\mathbb{R}^2$ vers lui-même et telle que

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{f(z_0+h+ik)-f(z_0)-Df_{z_0}(h,k)}{\sqrt{|h|^2+|k|^2}} = 0,$$

et donc si $f'(z_0)$ existe, en posant $Df_{z_0}(h,k) = (h+ik)f'(z_0)$, on constate que la dérivabilité entraîne la différentiabilité, et que dans le cas dérivable, la différentielle (l'application $\mathbb{R}$-linéaire Df_{z_0}) a une forme particulièrement simple. Plus spécifiquement, sa différentielle n'est pas seulement $\mathbb{R}$-linéaire, mais aussi $\mathbb{C}$-linéaire. En outre, puisque dans le cas différentiable, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = Df_{z_0}(1,0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = Df_{z_0}(0,1),$$

il vient que dans le cas dérivable,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = if'(z_0),$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0. \tag{C}$$

Réciproquement, si f est différentiable en z_0 et satisfait à la relation (C), elle est dérivable en z_0 et sa dérivée en z_0 vaut $Df_{z_0}(1,0)$, donc :

Proposition 1.3.1. "*Equations de Cauchy*". *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, avec Ω ouvert de $\mathbb{C}$. Pour que f soit dérivable en $z_0 \in \Omega$, il faut et il suffit qu'en tant que fonction de deux variables, elle soit différentiable en z_0 et que sa différentielle vérifie (C) en z_0.*

En outre, si nous écrivons $f = P + iQ$, avec P, Q à valeurs réelles, la condition (C) se traduit sous la forme des **équations de Cauchy** *:*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Preuve. Tout est déjà fait si ce n'est de remarquer que f est différentiable si et seulement si P et Q le sont, et qu'alors $Df = DP + iDQ$. Il ne reste plus qu'à traduire (C) sur P et Q. $\square$

1.4. Expressions polaires des équations de Cauchy.

La formule du changement de variable existe pour les applications de plusieurs variables. Ici, nous allons supposer $z \neq 0$ et poser $z = re^{i\theta}$. Nous noterons $g(r,\theta) = f(re^{i\theta})$. En utilisant la formule de différenciation d'une composée, et donc ici en restreignant (r,θ) à varier dans $]0,+\infty[\times]\alpha,\alpha+2\pi[$, nous avons

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}; \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

Ces formules s'inversent, et donnent le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}. \end{cases}$$

La condition $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$ (cf. (C)) s'écrit alors

$$\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} = i\frac{\partial g}{\partial r}. \qquad (\tilde{C})$$

Du coup, les équations de Cauchy deviennent, si $f = P + iQ$ et $g = \tilde{P} + i\tilde{Q}$,

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta}. \end{cases}$$

1.5 : exercices.

Ex. 1.5.1 : montrer que si l'on pose $\exp(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$, on obtient une série de rayon de convergence infini. Montrer que $z \mapsto \exp(z) \in H(\mathbb{C})$.

Ex. 1.5.2 : soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries de nombres complexes absolument convergentes. On pose $w_n = \sum_{0\leq k\leq n} u_k v_{n-k}$, $n \geq 0$. Montrer qu'alors $\sum_{n\geq 0} w_n$ est absolument convergente, et que $\sum_{n\geq 0} w_n = \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right)$.

Ex. 1.5.3 : soient $A(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ et $B(X) = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$ deux séries entières de rayon de convergence $\geq \rho > 0$. Montrer que leur somme $S(X) = \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)X^n$ et leur produit $P(X) = \sum_{n\geq 0}(\sum_{k\leq n} a_k b_{n-k})X^n$, formels, ont un rayon de convergence $\geq \rho$. Montrer ensuite que si $|z| < \rho$, alors $S(z) = A(z) + B(z)$ et $P(z) = A(z)B(z)$.

En déduire que $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Ex. 1.5.4 : soit $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que $S : z \mapsto S(z)$ est indéfiniment dérivable sur $D(a,R)$, et montrer que pour chaque $n \geq 0$,

$$a_n = \frac{S^{(n)}(a)}{n!}.$$

Supposons que $f : D(a,r) \to \mathbb{C}$ soit analytique, et qu'en $b \in D(a,r)$, il existe deux séries entières $S(z) = \sum_{n\geq 0} s_n(z-b)^n$ et $T(z) = \sum_{n\geq 0} t_n(z-b)^n$, de rayons de convergence $\geq \rho > 0$, et un $0 < \varepsilon \leq \rho$, telles que dans $D(a,r) \cap D(b,\varepsilon)$, $f = S = T$. Montrer

que pour chaque $n \geq 0$, $s_n = t_n$, autrement dit que le développement en série entière est unique.
Ex. 1.5.5 : on pose $\sin(z) = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$ et $\cos(z) = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}$. Montrer que

$$\begin{aligned}
&\cos(z+z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z' \\
&\sin(z+z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z' \\
&\cos^2 z + \sin^2 z = 1.
\end{aligned}$$

Ex. 1.5.6 : *un Théorème Taubérien.*
Soient $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ et $(\beta_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres ayant les propriétés suivantes :
a) il existe $M > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$|\alpha_1 + \ldots + \alpha_n| \leq M;$$

b) les β_n sont réels positifs ou nuls et décroissent.
1 : montrer qu'alors pour tout $n \geq 1$, $|\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n| \leq M\beta_1$ (*Indication* : introduire $s_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ et écrire $\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n = (\beta_1 - \beta_2)s_1 + \ldots + (\beta_{n-1} - \beta_n)s_{n-1} + \beta_n s_n$).
2 : soit $S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ une série entière à coefficients complexes, de rayon de convergence 1, et telle que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. Utiliser **1** pour montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge uniformément dans l'intervalle fermé $[0, 1]$, et en conclure que

$$\lim_{\substack{x\to 1,\\ 0<x<1}} \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_n.$$

Ex. 1.5.7 : montrer que $z \mapsto \bar{z}$ n'est nulle part dérivable.

Chapitre 2 : Intégration sur des chemins

2.1. Intégrales sur les chemins.

Soit (X,Θ) un espace topologique. Une **courbe** dans X est une application continue $\gamma : [\alpha,\beta] \to X$, où $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$. Nous appelons $[\alpha,\beta]$ l'**intervalle de paramétrage** de γ, et notons $\gamma^\star$ l'image de l'application γ.

Si le **point initial** $\gamma(\alpha)$ coïncide avec le **point final** $\gamma(\beta)$, nous dirons que γ est une **courbe fermée**.

Un **chemin** est une courbe du plan $\mathbb{C}$ muni de sa topologie euclidienne, continûment dérivable par morceaux (c'est à dire qu'il existe une partition finie de $[\alpha,\beta]$ en des intervalles fermés ne s'intersectant, au plus, qu'en leurs extrémités, et tels que sur chacun d'eux, γ restreinte est de classe $\mathcal{C}^1$).

Un **chemin fermé** est une courbe fermée qui est aussi un chemin.

Supposons que γ soit une chemin, et que $f : \gamma^\star \to \mathbb{C}$ soit une fonction continue. On pose alors

$$\int_\gamma \mathbf{f(z)dz} = \int_\alpha^\beta \mathbf{f(\gamma(t))\gamma'(t)dt}, \qquad (2-1)$$

l'intégrale ci-dessus étant bien définie au sens de Riemann.

Si $\phi : [\alpha_1,\beta_1] \to [\alpha,\beta]$ est bijective, continûment dérivable, et si $\phi(\alpha_1) = \alpha$ et $\phi(\beta_1) = \beta$, alors $\gamma_1 = \gamma \circ \phi$ est un chemin, et $\gamma_1^\star = \gamma^\star$. De plus, par le théorème élémentaire du changement de variables dans les intégrales des fonctions continues, on a

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma(\phi(t)))\gamma'(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_\alpha^\beta \gamma(\phi(t))\gamma'(t)dt,$$

et donc

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

Nous dirons que les deux chemins γ_1 et γ précédents sont **équivalents**. Le lecteur vérifie sans peine que c'est une relation d'équivalence. Et donc nous avons démontré que $\int_\gamma f(z)dz$ **ne change pas si l'on remplace γ par un chemin équivalent**.

Etant donnés deux chemins γ_1 et γ_2, nous pouvons choisir les intervalles de paramétrage de sorte que celui de γ_1 soit $[a,b]$ et celui de γ_2 soit $[b,c]$. Si le point final de γ_1 coïncide avec le point initial de γ_2, en joignant les deux, puisque seules la continuïté et la dérivabilité par morceaux sont éxigées, nous obtenons un chemin γ paramétré par $[a,c]$, appelé la **somme** de γ_1 et de γ_2, **noté $\gamma_1 + \gamma_2$**, et tel que $\gamma^\star = \gamma_1^\star \cup \gamma_2^\star$. Alors la relation de Chasles sur l'intégrale de a à c en passant par b montre que

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz. \qquad (2-2)$$

Supposons maintenant que $[0,1]$ paramètre le chemin γ et posons $\gamma_1(t) = \gamma(1-t)$, $0 \le t \le 1$. Alors γ_1 est un chemin, $\gamma_1^\star = \gamma^\star$, mais si $f \in \mathcal{C}^0(\gamma^\star,\mathbb{C})$ (les fonctions continues

$f:\gamma^\star \to \mathbb{C}$), alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(1-t))\gamma'(1-t)(-1)dt = -\int_\gamma f(z)dz. \qquad (2-3)$$

On appelle γ_1 le **chemin opposé** au chemin γ, noté $-\gamma$.

Pour le module, nous avons

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leq \| f \|_\infty \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt, \qquad (2-4)$$

où $\| f \|_\infty = \sup_{z\in\gamma^\star} |f(z)|$, et $\int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt$ représente **la longueur** du chemin γ, il sera **noté $\mathbf{L}(\gamma)$**.

2.2. : l'indice.

Rappelons que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ munis de leur topologie euclidienne ont quelques propriétés très fortes : ces propriétés, que nous allons énoncer, sont vraies avec plus de généralité, mais ici, seuls nous intéressent la droite et le plan euclidiens.

Un intervalle fermé $[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$ est compact : plus généralement les compacts de la droite ou du plan sont les fermés bornés, les fermés étant les complémentaires des ouverts. Toute fonction continue à valeurs dans le plan, définie sur un compact, est bornée et dans le cas réel, atteint ses bornes. En outre, l'image continue d'un compact est compacte.

Si Ω est un ouvert du plan, et si $z\in\Omega$, $c(z)$ désigne la composante connexe de z : c'est le plus grand connexe contenant z et contenu dans Ω. Parcequ'Ω est ouvert, $c(z)$ est ouvert. Si $z'\in\Omega$, on a ou bien $c(z)=c(z')$, ou bien $c(z)\cap c(z')=\emptyset$. Si $C\subset\Omega$ est connexe, alors $C\subset c(z)$ dès que $z\in C$.

Si $f:\Omega\to\mathbb{Z}$ est continue, alors f est constante sur les composantes connexes de Ω, car l'image continue d'un connexe est connexe, et les connexes de $\mathbb{Z}$ sont les singletons ($\mathbb{Z}$ est muni de la topologie induite par l'euclidienne).

Définition - Théorème 2.2.1. "*L'indice*". *Soit γ un chemin fermé, et Ω le complémentaire de $\gamma^\star$ ($\Omega=\mathbb{C}\setminus\gamma^\star$). Définissons, pour $z\in\Omega$, l'indice de z relativement à γ, noté $Ind_\gamma(z)$, par*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Alors $z\mapsto Ind_\gamma(z)$ est une fonction à valeurs entières sur Ω, constante sur les composantes connexes de Ω, et qui vaut 0 sur la composante connexe non bornée de Ω.

Remarque : $\gamma^\star$ est compact donc borné donc inclus dans un disque $D(0,R)$. Par suite, $\mathbb{C}\setminus D(0,R)$, qui est connexe, est inclus dans Ω. Et donc toute composante connexe de Ω qui ne contient pas $\mathbb{C}\setminus D(0,R)$ est contenue dans $D(0,R)$, donc bornée. Et donc une seule composante connexe de Ω n'est pas bornée.

Preuve. Remarquons que $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ est continue sur $\gamma^\star$ lorsque $z \in \Omega$.

En paramétrant, $\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}ds$. Puisque $\frac{w}{2i\pi}$ est entier si et seulement si $e^w = 1$, il vient que $\text{Ind}_\gamma(z)$ est entier si et seulement si $\psi(\beta) = 1$, avec

$$\psi(t) = \exp\left(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds\right),\ \alpha \le t \le \beta. \tag{2-5}$$

Puisque γ' est définie continue sauf peut-être sur un ensemble fini de points $S \subset [\alpha, \beta]$, nous pouvons différencier $(2-5)$ pour obtenir, lorsque $t \in [\alpha,\beta] \setminus S$, l'équation

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \tag{2-6}$$

Donc $\phi := \frac{\psi}{\gamma - z}$ est continue sur $[\alpha, \beta]$, dérivable et de dérivée nulle sur $[\alpha,\beta] \setminus S$. Comme S est fini, ϕ est constante sur $[\alpha, \beta]$. Puisque $\psi(\alpha) = 1$, il vient

$$\psi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(\alpha) - z},\ \alpha \le t \le \beta.$$

Enfin, γ est fermé, i.e. $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, et donc la relation ci-dessus entraîne que $\psi(\beta) = 1$, et donc $\text{Ind}_\gamma(z)$ est entier.

Pour conclure, par $(2-4)$, si $|z|$ est très grand, on a $|\text{Ind}_\gamma(z)| < 1$, et puisque c'est un entier, on aura $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$ pour $|z|$ suffisamment grand.

Enfin, $z \mapsto \text{Ind}_\gamma(z)$ est continue sur Ω, à valeurs entières, donc constante sur les composantes connexes de Ω. $\square$

Exemple 2.2.2. *Si $\gamma_r(t) = a + re^{2i\pi t}$, $0 \le t \le 1$, alors*

$$Ind_{\gamma_r}(z) = \begin{cases} 1 \ si\ |z-a| < r; \\ 0 \ si\ |z-a| > r. \end{cases}$$

Preuve. Si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^\star$, Ω a deux composantes connexes, à savoir $c_1 = D(a,r)$ et $c_2 = \mathbb{C} \setminus \bar{D}(a,r)$. Par le théorème de l'indice, Ind_γ est constante sur chacune d'elles, et nulle sur c_2 puisque c'est celle qui n'est pas bornée.

Calculons pour conclure $\text{Ind}_\gamma(a)$:

$$\text{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{r2i\pi e^{2i\pi t}}{re^{2i\pi t}} dt = 1.$$

$\square$

2.3. : expression intégrale des fonctions analytiques.

Nous disposerons en fin d'année de théorèmes d'interversion de l'intégrale et de la limite plus puissants que celui qui suit (le théorème de convergence dominée de Lebesgue, cf. cours de LM1). Cependant le Lemme qui suit suffira à nos besoins :

Lemme 2.3.1. *"Convergence uniforme et intégrale". Soit γ un chemin et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues sur $\gamma^\star$, à valeurs complexes. Si il existe $f : \gamma^\star \to \mathbb{C}$ telle que $\| f - f_n \|_\infty \to 0$, où le sup est pris sur $\gamma^\star$, alors*

$$\lim_n \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma \left(\lim_n f_n(z)\right) dz.$$

Preuve. La fonction f est continue en tant que limite uniforme des fonctions continues f_n (deug). Donc $\int_\gamma f(z)dz$ est bien définie. En outre, si $[\alpha, \beta]$ paramètre γ, alors à l'aide de propriétés classiques de l'intégrale de Riemann,

$$\left|\int_\gamma f(z)dz - \int_\gamma f_n(z)dz\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t)) - f_n(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \leq \| f - f_n \|_\infty L(\gamma).$$

□

Proposition 2.3.2. *"Intégrales analytiques". Soient γ un chemin et $\phi : \gamma^\star \to \mathbb{C}$ continue. Alors*

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{C} \setminus \gamma^\star & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & f(z) = \int_\gamma \frac{\phi(u)}{u-z} du \end{array}$$

définit une fonction analytique. En outre, on a

$$f^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\phi(u)}{(z-u)^{n+1}} du, \ n \geq 1.$$

Enfin, le rayon de convergence de la série qui exprime l'analycité de f en z est supérieur ou égal à la distance de z à $\gamma^\star$.

Preuve. Soit $a \notin \gamma^\star$, et $r > 0$ tel que $\bar{D}(a, r) \cap \gamma^\star = \emptyset$ (un tel r existe car $\mathbb{C} \setminus \gamma^\star$ est ouvert, en tant que complémentaire d'un fermé). Soit ensuite $r' > r$ tel que $D(a, r') \cap \gamma^\star = \emptyset$ (un tel r' existe car $(z, z') \in \bar{D}(a, r) \times \gamma^\star \mapsto |z - z'|$ est continue, positive sur un compact, donc atteint son inf qui est strictement positif).

Alors si $z \in \bar{D}(a, r)$ et $u \in \gamma^\star$, $\frac{|z-a|}{|u-a|} \leq \frac{r}{r'} < 1$, et donc nous pouvons développer en série

$$\frac{\phi(u)}{u-z} = \frac{\phi(u)}{u-a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{u-a}} = \sum_{n\geq 0} \frac{\phi(u)(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}.$$

Pour $z \in \bar{D}(a, r)$, la série ci-dessus converge normalement et uniformément en $u \in \gamma^\star$ (car ϕ est continue donc bornée sur le compact $\gamma^\star$).

Alors le Lemme 2.3.1. montre (en considérant la suite des sommes partielles) que

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} (z-a)^n \int_\gamma \frac{\phi(u)}{(u-a)^{n+1}} du.$$

Donc f est développable en série entière en a, et le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à tout $r > 0$ tel que $\bar{D}(a, r) \cap \gamma^\star = \emptyset$. Donc ce rayon est supérieur ou égal à $d(a, \gamma^\star) := \inf_{u\in\gamma^\star} |u - a|$.

La formule donnant l'expression de $f^{(n)}(z)$ découle alors de **1.5.4.**. □

2.4. : exercices.

Ex. 2.4.1 : déterminer les images et calculer les longueurs des chemins suivants :

– $t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi t}$;

– $t \in [0,1] \mapsto \begin{cases} 3t \text{ si } t \leq \frac{1}{3}; \\ 1+3i(t-\frac{1}{3}) \text{ si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}; \\ (1-3(t-\frac{2}{3}))(1+i) \text{ si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$

Ex. 2.4.2 : dans le plan euclidien, si $a, b \in \mathbb{C}$, et si $I = [\alpha, \beta]$ est un intervalle, on note $\gamma_{a,b,I}$ le chemin paramétré par I et défini par $\gamma_{a,b,I}(t) = a + \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}(b-a)$.

Soient A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives a, b, c et d. Soit γ le chemin défini par

$$\gamma = \gamma_{a,b,[0,\frac{1}{4}]} + \gamma_{b,c,[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]} + \gamma_{c,d,[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]} + \gamma_{d,a,[\frac{3}{4},1]}.$$

On suppose que $0 \notin \gamma^\star$. En faisant varier les points A, B, C, D, montrer que $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$ peut prendre différentes valeurs. Lesquelles?

Ex. 2.4.3 : définissons le chemin $t \in [0,1] \mapsto \gamma_n(t) = Re^{2i\pi nt}$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$.

Calculer $\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(0)$ pour chaque n. Calculer suivant les valeurs de $|z|$ les différentes valeurs de $\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(z)$ lorsque z parcourt $\mathbb{C} \setminus \gamma_n^\star$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Ex. 2.4.4 : avec les notations de l'exercice précédent, calculer $\int_{\gamma_1} \frac{z^2}{z-u} dz$ lorsque $|u| \neq 1$.

Ex. 2.4.5 : paramétrer avec l'intervalle $[0,1]$ un chemin fermé commençant en 0 dont l'image est le quadrilatère de sommets d'abscisses $0, 1, 1+i, 2i$ et dont la longueur vaut 12.

Ex. 2.4.6 : étant donnés deux complexes a, b, quelle est la longueur du chemin $t \mapsto a + (b-a)t^2$, avec $t \in [0,1]$?

Chapitre 3 : primitives des fonctions complexes

3.1 : primitives.

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Nous appelons **primitive** de f dans Ω toute $F : \Omega \to \mathbb{C}$ dérivable et telle que $F' = f$.

Par exemple, en utilisant le chapitre 2, une série entière $z \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, ayant un rayon de convergence $R > 0$, admet des primitives : $z \mapsto c + \sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{a_{n+1}}$ à l'intérieur de son disque de convergence.

3.2 : primitives et intégrales.

PROPOSITION 3.2.1. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue et admettant une primitive F dans Ω. Alors si γ est un chemin et $\gamma^\star \subset \Omega$, d'origine z_0 et d'extrémité z_1,*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

En particulier, sous les mêmes hypothèses, si en outre γ est fermé, on a $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

PREUVE. Supposons γ paramétré par $[0, 1]$, et posons $G(t) = F(\gamma(t))$, $0 \leq t \leq 1$. Alors, sauf pour un ensemble fini $S \subset [0, 1]$, on a $G'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)$, et en outre, G est continue. Donc, par le théorème fondamental du calcul intégral,

$$G(1) - G(0) = \int_0^1 G'(t)dt = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\gamma f(z)dz.$$

□

3.3 : primitives dans un ouvert étoilé.

Soit $E \subset \mathbb{C}$: nous dirons que z_0 est **un centre** de E si $z \in E \Rightarrow [z_0, z] \subset E$. Un sous-ensemble E peut ne pas avoir de centre, en avoir un, ou plusieurs.

Nous dirons que E **est étoilé** s'il a un centre.

LEMME 3.3.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue. Alors deux primitives de f sur Ω ne diffèrent que d'une constante.*

PREUVE. Soient F_1 et F_2 deux telles primitives. Alors si $G = F_1 - F_2$, $G' = 0$ dans Ω.

Soit z_0 un centre de Ω. Soit $z \in \Omega$, et soit $\gamma : O \leq t \leq 1 \mapsto tz + (1-t)z_0$ le chemin rectiligne joignant z_0 à z. Alors $G(z) - G(z_0) = \int_\gamma G'(z)dz = 0$, et donc G est constante sur Ω. □

Un chemin triangulaire γ dans $\mathbb{C}$ est déterminé par trois complexes z_1, z_2, z_3 tels que $\gamma^\star = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1]$.

Proposition 3.3.2. *Soit Ω un ouvert étoilé du plan complexe, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue. Alors f admet des primitives dans Ω si (et seulement si) $\int_{\mathcal{T}} f(z)dz = 0$ pour tout chemin triangulaire fermé $\mathcal{T}$ contenu dans Ω.*

Preuve. Soit z_0 un centre de Ω, et notons $I_{z_0,z} : t \mapsto tz + (1-t)z_0$, $0 \leq t \leq 1$. Définissons ensuite

$$F : z \in \Omega \mapsto F(z) = \int_{I_{z_0,z}} f(u)du.$$

Soit $z \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z,r) \subset \Omega$. Si $|v| < r$, le triangle $\mathcal{T}(v)$ de sommets $z_0, z, z+v$ a son contour contenu dans Ω. Alors l'hypothèse s'écrit

$$\int_{I_{z_0,z}} f(u)du + \int_{I_{z,z+v}} f(u)du - \int_{I_{z_0,z+v}} f(u)du = 0,$$

c'est à dire $F(z+v) - F(z) = \int_{I_{z,z+v}} f(u)du = \int_0^1 f(z+tv)vdt = v\int_0^1 f(z+tv)dt$. Donc si $v \neq 0$,

$$\frac{F(z+v) - F(z)}{v} - f(z) = \int_0^1 [f(z+tv) - f(z)]dt$$

ce qui tend vers 0 lorsque v tend vers 0, par continuité de f en z. Donc $F' = f$. $\square$

Puisqu'un ouvert est une union de boules ouvertes de rayons positifs, lesquelles sont des ouverts étoilés, nous en déduisons le

Corollaire 3.3.3. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue d'intégrale nulle sur tout chemin triangulaire contenu dans Ω. Alors f admet localement dans Ω des primitives.*

3.4 : primitives dans un domaine.

Un **domaine** $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert dont deux points quelconques peuvent toujours être reliés par un chemin tracé dans Ω.

Lemme 3.4.1. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est continue et Ω est un domaine, deux primitives de f sur Ω diffèrent par une constante.*

Preuve. Soient F_1 et F_2 deux telles primitives, soient $z_0, z \in \Omega$, et soit $\gamma : [0,1] \to \Omega$ un chemin tel que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z$. Alors

$$F_2(z) - F_1(z) = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt + F_2(z_0) - F_1(z_0) - \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

$\square$

Proposition 3.4.2. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue, avec $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine. Alors f admet une primitive dans Ω si et seulement si $\int_\gamma f(z)dz = 0$ pour tout chemin fermé γ dans Ω.*

Preuve. La condition est clairement nécessaire.

Soient $z_0, z \in \Omega$. Soient γ et $\tilde{\gamma}$ deux chemins contenus dans Ω, ayant pour origine z_0 et pour extrémité z. La condition entraîne que $\int_\gamma f(u)du = \int_{\tilde{\gamma}} f(u)du$, ce qui permet de définir

$$F(z) = \int_\gamma f(u)du$$

sans ambiguïté. Montrons que F est une primitive de f dans Ω. Soit $r > 0$ tel que $D(z,r) \subset \Omega$. Le disque ouvert étant étoilé, f admet une unique primitve G dans $D(z,r)$ telle que $G(z) = F(z)$. Soit $u \in D(z,r)$, soit $\lambda = \gamma + I_{[z,u]} - \delta$, où δ est un chemin de z_0 à u dans Ω. Alors $\int_\lambda f(v)dv = 0$, et donc

$$F(u) = F(z) + \int_{I_{[z,u]}} f(v)dv = F(z) + G(u) - G(z) = G(u),$$

et donc $F = G$ dans $D(z,r)$, et donc puisque G est une primitive de f dans $D(z,r)$, F' existe en z et $F'(z) = f(z)$. $\square$

3.5 : exercices.

Ex. 3.5.1 : montrer que dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, $z \mapsto \frac{1}{(z-a)^2}$ a des primitives. Lesquelles? $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ est-il un ouvert étoilé? Un domaine?

Ex. 3.5.2 : montrer qu'un ouvert étoilé est un domaine. Montrer qu'un domaine est connexe.

Montrer que le plan fendu $\mathcal{P} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ est un ouvert étoilé. Montrer que $z \in \mathcal{P} \mapsto \log z + c$ est une primitive dans $\mathcal{P}$ de $\frac{1}{z}$ (cf. annexe).

Ex. 3.5.3 : montrer que $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'a pas de primitive dans $\mathbb{C}^\star$ (utiliser l'indice relativement à l'origine).

Ex. 3.5.4 : construire un ouvert étoilé dont tous les points sont des centres. En construire un n'ayant qu'un seul centre.

Chapitre 4 : analycité des fonctions holomorphes

4.1: théorème de Goursat[1].

Théorème 4.1.1. Goursat. *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe dans un ouvert étoilé y admet des primitives. Ou encore quelque soit γ un chemin fermé dans Ω, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

Preuve. Appelons triangle le contour et l'intérieur du contour (d'un triangle classique). Etant donné un triangle T, ∂T désignera le chemin fermé constitué du contour du triangle, parcouru une fois dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique direct), et $Int(T)$ l'intérieur du triangle.

Lemme 4.1.2. *Si Δ est un domaine étoilé, tout contour triangulaire ∂T tracé dans Δ a son intérieur dans Δ.*

Preuve du Lemme. Soit z_0 un centre de Δ. Soient z_1, z_2, z_3 les sommets du contour triangulaire ∂T, et soit $z \in Int(T)$. Alors la droite joignant z_0 à z coupe ∂T en un point z_4 tel que $z \in [z_0, z_4]$. Puisque Δ est étoilé, on a $[z_0, z_4] \subset \Delta$ et donc $z \in \Delta$. □

Fin de la preuve du Théorème de Goursat : supposons le triangle T de sommets a, b, c; nous subdivisons chacun des côtés de T par son milieu, et obtenons ainsi quatre nouveaux triangles T_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Chacun est l'image homothétique de rapport $\frac{1}{2}$ du triangle T, et donc a un périmètre moitié de celui de T.

On s'aperçoit sans peine que $\partial T = \partial T_1 + \ldots + \partial T_4$, de sorte que

$$I := \int_{\partial T} f(z)dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial T_i} f(z)dz, \text{ et donc } |I| \leq \sum_{i=1}^{4} |\int_{\partial T_i} f(z)dz|,$$

et par suite pour un i au moins, $|\int_{\partial T_i} f(z)dz| \geq \frac{1}{4}|I|$.

Notons $T^0 = T$ et choisissons $T^1 = T_i$. Nous recommençons avec T^1 et ainsi de suite pour obtenir une suite de triangles emboîtés $(T^n)_{n\geq 0}$ dont la suite de périmètres décroît en se divisant par deux, et qui soit telle que $|\int_{\partial T^n} f(z)dz| \geq \frac{|I|}{4^n}$. Notons p_n le périmètre de T^n et δ_n son diamètre ($\delta_n = \max_{u,v\in T^n} |u - v|$). Observons que $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n$ et $\delta_{n+1} = \frac{1}{2}\delta_n$.

Soit a le point d'intersection des T^n. La fonction f est holomorphe en a, et donc il existe $\varepsilon : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $\lim_a \varepsilon(z) = 0$, et que $f(z) = f(a) + (z - a)f'(a) + (z - a)\varepsilon(z)$, $z \in \Omega$. On a donc aussi

$$\int_{\partial T^n} f(z)dz = \int_{\partial T^n} f(a) + (z - a)f'(a)dz + \int_{\partial T^n} (z - a)\varepsilon(z)dz = \int_{\partial T^n} (z - a)\varepsilon(z)dz,$$

[1] Mathématicien français (Lanzac, Lot, 1858 - Paris, 1936). Elève de l'Ecole normale supérieure, il enseigna principalement à Paris. Il fit avancer l'analyse dans plusieurs branches (analyse infinitésimale, théorie des équations aux dérivées partielles) et en assura la transmission par un enseignement réputé à la Sorbonne. Il précisa notamment les conditions d'application du théorème de Cauchy (auquel on a joint son nom). Goursat vit ses travaux récompensés par de nombreux prix. Il fut membre de l'Académie des sciences en 1919 et il présida la Société mathématique de France.

puisque $z \mapsto f(a) + (z-a)f'(a)$ a des primitives dans Ω (polynôme). Ainsi en notant $I_n = \int_{\partial T^n} f(z)dz$, on a

$$\frac{|I_0|}{4^n} \leq |I_n| \leq \delta_n p_n \max_{z \in T^n} |\varepsilon(z)| = \frac{p_0 \delta_0}{4^n} \max_{z \in T^n} |\varepsilon(z)|,$$

et donc pour chaque n, $|I_0| \leq p_0 \delta_0 \max_{z \in T^n} |\varepsilon(z)|$, ce qui n'est possible que si $|I_0| = 0$, puisque $\lim_a \varepsilon(z) = 0$. $\square$

4.2: théorème de d'Alembert[2].

Voici une preuve d'un théorème important d'algèbre :

Théorème 4.2.1. "de d'Alembert". *Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet un zéro complexe, i.e. le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.*

Preuve. Soit $f(z)$ un polynôme à coefficients complexes de degré n. Supposons qu'il ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Alors $z \mapsto \frac{nf(z) - zf'(z)}{zf(z)}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}^\star$.

Soit $R > 0$ et $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Alors $\mathrm{Ind}_{\gamma_R}(0) = 1$, et

$$I_R := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{nf(z) - zf'(z)}{zf(z)} dz = n \mathrm{Ind}_{\gamma_R}(0) = n,$$

car $z \mapsto f'(z) \ / \ f(z)$ est holomorphe, ce qui par le Théorème de Goursat implique que son intégrale sur γ_R est nulle.

Mais $\lim_{|z| \to \infty} \frac{nf(z) - zf'(z)}{zf(z)} = 0$. Donc

$$\limsup_{R \to +\infty} |I_R| \leq \limsup_{R \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sup_{|z|=R} \left| \frac{nf(Re^{it}) - Re^{it} f'(Re^{it})}{f(Re^{it})} \right| \frac{1}{R} R |e^{it}| dt = 0,$$

et donc $n = 0$. $\square$

4.3: formule intégrale de Cauchy pour un disque et propriété de moyenne.

Théorème 4.3.1. *Notons $D = D(z, R)$, et soit $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors si $0 < r < R$, et si $\gamma_r(t) = z + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, et si $|a - z| < r$, on a*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u - a} du.$$

[2] Mathématicien et philosophe français (Paris, 1717 - id, 1783). D'Alembert fut abandonné à sa naissance sur les marches de l'église Saint-Jean-le-Rond, dans la paroisse de Notre-Dame de Paris, par sa mère, la marquise de Tencin. Baptisé Jean le Rond, il est placé à l'hospice des Enfants-Trouvés. Le nourrisson est rapidement retiré de l'hospice et placé chez la femme d'un pauvre vitrier. Bien qu'il n'ait pas reconnu l'enfant, son père, le chevalier Destouches, veille discrètement à son éducation et fait servir une pension à la nourrice...

Preuve. Soit $0 < \varepsilon < r - |a-z|$. Soit $\delta(t) = a + \varepsilon e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Soit γ le circuit tel que

$$\gamma^\star = \{|u-z| = r\} \cup \{|u-a| = \varepsilon\} \cup \{z + t\tfrac{a-z}{|a-z|} : -r \leq t \leq |a-z| - \varepsilon\} \\ \cup \{z + t\tfrac{a-z}{|a-z|} : |a-z| + \varepsilon \leq t \leq r\},$$

les deux segments étant parcourus dans un sens puis dans l'autre, le grand cercle dans le sens direct, le petit dans le sens indirect, et partant de $b = z + r\frac{a-z}{|a-z|}$.

Le chemin fermé γ est l'union de deux chemins fermés γ_1 et γ_2, chacun étant l'union de deux demi-cercles et de deux morceaux de segment, chacun parcouru une seule fois, chacun de ces deux chemins partant de b (*faire un dessin*).

Ces deux chemins sont inclus dans un ouvert étoilé ne contenant pas a, disons $D(z,R) \setminus (a + i(a-z)\mathbb{R}^-)$ pour γ_1, et $D(z,R) \setminus (a + i(a-z)\mathbb{R}^+)$ pour γ_2.

Puisque $g(u) = \frac{f(u)-f(a)}{u-a}$ est holomorphe sur chacun de ces ouverts étoilés, il vient que son intégrale sur chacun de γ_1 et de γ_2 est nulle, et donc

$$\int_\gamma g(u)du = 0, \text{ ou encore } \int_{\gamma_r} g(u)du = \int_\delta g(u)du,$$

chaque segment étant parcouru dans un sens puis dans l'autre.

Ensuite, en posant $g(a) = f'(a)$, on prolonge g par continuité en a. Ainsi g est bornée au voisinnage de a, et donc $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\delta g(u)du = 0$. Et donc

$$\int_{\gamma_r} g(u)du = 0, \text{ et donc } \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u-a}du = \frac{f(a)}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{du}{u-a} = f(a)\mathrm{Ind}_{\gamma_r}(a) = f(a).$$

□

Corollaire 4.3.2.. *Une fonction entière se développe en série entière en un point a de rayon de convergence infini.*

Preuve. Par la formule intégrale de Cauchy, en notant $\gamma_{a,r}(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, on a $f(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{a,r}} \frac{f(z)}{z-u}dz$ si $|u-a| < r$, et par **2.3.2.**, $u \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{a,r}} \frac{f(z)}{z-u}dz$ est analytique en a de rayon de convergence $\geq r$. Donc f est analytique en a de rayon de convergence $\geq r$ quel que soit $r > 0$, donc de rayon de convergence infini puisque les coefficients qui développent f en série entière en a sont uniques. □

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe, $a \in \Omega$, et $r > 0$ tel que $\bar{D}(a,r) \subset \Omega$. Alors soit $r' > r$ tel que $D(a,r') \subset \Omega$.

Notons $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. La formule intégrale de Cauchy, pour ce chemin et ce paramétrage, s'écrit alors

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt, \tag{M}$$

c'est à dire que f prend en a la valeur moyenne de ses valeurs sur le cercle centré en a et de rayon r. On dit alors que f a la **propriété de moyenne**.

Remarquons que si f a la propriété de moyenne, il en est de même de $\bar{f}$, $\mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$. L'ensemble des fonctions ayant la propriété de moyenne est la classe des fonctions dites **harmoniques**. Elle est plus large que celle des fonctions holomorphes, cf. **Ex. 1.5.7.**.

4.4: analycité des fonctions holomorphes.

PROPOSITION 4.4.1. *Si f est holomorphe dans un ouvert Ω, elle y est analytique. En particulier, la dérivée d'une fonction holomorphe est holomorphe. En outre, si $a \in D$, et si $r > 0$ est tel que $D(a, r) \subset \Omega$, alors le rayon de convergence de la série entière en laquelle f se développe localement en a, vaut au moins r.*

PREUVE. On représente f sous la forme intégrale **4.3.1.** puis il suffit d'appliquer **2.3.2.**. □

Supposons désormais que f soit holomorphe dans un ouvert Ω et que $D(a, r) \subset \Omega$ pour un certain $a \in \Omega$ et un $r > 0$. Alors par **4.3.1.** et **2.3.2.** et **1.5.4.**, f se développe en série entière sur $D(a, r)$, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$, avec

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} du = \frac{1}{2i\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) e^{-int} dt,$$

et le rayon de convergence de cette série dépasse strictement $r > 0$.

Puisque $\gamma_r^\star$ est compact, et que f y est continue, $|f|$ y est bornée, et

$$M(r) := \sup_{z \in \gamma_r^\star} |f(z)| < +\infty.$$

Nous déduisons de ceci et de l'expression intégrale de a_n les *inégalités de Cauchy* :

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \; n \geq 0.$$

DÉFINITION - THÉORÈME 4.4.2. "DE LIOUVILLE[3] ". *Une fonction entière est une fonction $f \in H(\mathbb{C})$. Toute fonction entière bornée est constante.*

PREUVE. Utilisons les inégalités de Cauchy pour le développement en série entière de f en 0 (qui doit avoir un rayon de convergence infini), et remarquons que si f est entière et bornée, alors il existe $M > 0$ tel que quel que soit $r > 0$, $M(r) \leq M$. Alors pour chaque $n \geq 0$, $a_n \leq \frac{M}{r^n}$ quel que soit $r > 0$. Donc $a_n = 0$ si $n \geq 1$. □

[3]Mathématicien français (Saint - Omer, 1809 - Paris, 1882). Il fut professeur à l'Ecole polytechnique et au Collège de France. Fondateur du Journal de mathématiques pures et appliquées, il a apporté une contribution originale du plus haut niveau aux mathématiques de son siècle. Principaux travaux: découverte des nombres transcendants, théorie des fonctions elliptiques, des fonctions à variables complexes et des fonctions doublement périodiques, transformations conformes de l'espace réel. Son théorème est l'une des bases de la mécanique statistique et de la théorie de la mesure. Théorème de Liouville: dans l'espace de phase d'un système mécanique, il y a conservation, au cours du temps, de la mesure d'un élément de volume dont chaque point suit les équations de mouvement du système considéré.

THÉORÈME 4.4.3. "DE D'ALEMBERT, SECONDE PREUVE". *Tout polynôme à coefficients complexes, et non constant, s'annule au moins un fois dans le plan.*

PREUVE. Supposons que g soit un polynôme non constant et qui ne s'annule pas dans $\mathbb{C}$, $g(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Alors $\lim_{|z|\to\infty} |g(z)| = +\infty$, et donc $\frac{1}{g}$ est entière et bornée, et non constante, ce qui contredit le théorème de Liouville. □

4.5: formule intégrale de Cauchy pour un ouvert étoilé.

THÉORÈME 4.5.1. *Soit f holomorphe sur Ω un ouvert étoilé. Soit λ un chemin fermé tel que $\lambda^\star \subset \Omega$, et soit $a \in \Omega \setminus \lambda^\star$. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\lambda \frac{f(z)}{z-a}dz = f(a)Ind_\lambda(a).$$

Plus généralement,

$$\frac{n!}{2i\pi}\int_\lambda \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = f^{(n)}(a)Ind_\lambda(a),\ n \geq 0.$$

PREUVE. Montrons d'abord le cas $n = 0$.

On pose $g(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ si $z \neq a$ et on pose $g(a) = f'(a)$. Alors $g : \Omega \to \mathbb{C}$ ainsi définie est continue. En outre, g est holomorphe sur $\Omega\setminus\{a\}$. Montrons que g est dérivable en a aussi : nous avons $f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + (z-a)^2\varepsilon(z)$ où ε est holomorphe dans un voisinnage de a (un petit disque ouvert de rayon positif centré en a et inclus dans Ω) (l'holomorphie découle ici par exemple de la représentation en série entière au voisinnage de a) ($\varepsilon(z) = \frac{1}{2}f^{(2)}(z)$ au voisinnage de a).

Alors $g(z) = f'(a)+(z-a)\varepsilon(z)$ au voisinnage de a, elle est manifestement holomorphe. L'ouvert Ω est étoilé, et g y est holomorphe. Par le théorème de Goursat, $\frac{1}{2i\pi}\int_\lambda g(z)dz = 0$, ou encore,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\lambda \frac{f(z)}{(z-a)}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\lambda \frac{f(a)}{(z-a)}dz = f(a)\mathrm{Ind}_\lambda(a),$$

par application de **2.2.1.**.

Pour $n \geq 1$, on pose $h(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\lambda \frac{f(z)}{z-a}dz$ et $l(a) = f(a)\mathrm{Ind}_\lambda(a)$, pour $a \in \Omega \setminus \lambda^\star$. Par **2.3.2.**, h est holomorphe sur $\Omega \setminus \lambda^\star$ et $h^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\lambda \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$.

Ensuite $a \mapsto \mathrm{Ind}_\lambda(a)$ est localement constante sur $\Omega \setminus \lambda^\star$ donc y est dérivable et à dérivée nulle. Donc $l^{(n)}(a) = \mathrm{Ind}_\lambda(a)f^{(n)}(a)$. □

4.6: théorème de Morera et convergence uniforme sur les compacts.

Une réciproque au théorème de Goursat :

THÉORÈME 4.6.1. "DE MORERA". *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est continue sur l'ouvert Ω et vérifie $\int_\lambda f(z)dz = 0$ pour tout circuit triangulaire λ dont le support $\lambda^\star$ est inclus dans un disque ouvert contenu dans Ω, alors f est holomorphe.*

PREUVE. Soit $a \in \Omega$. Il existe $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Omega$. Mais alors la restriction de f à l'ouvert étoilé $D(a,r)$ admet une primitive dans cet ouvert d'après **3.3.2.**. Une primitive de f est dérivable donc de dérivée dérivable mais sa dérivée n'est autre que f! □

Corollaire 4.6.2. “limites uniformes d'holomorphes sur les compacts”. *Soit* $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions holomorphes définies sur l'ouvert* Ω*. Supposons qu'il existe* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *telle que* $f_n \to f$ *simplement sur* Ω*. Supposons enfin que si* $K \subset \Omega$ *est compact (fermé borné), alors* $\sup_K |f_n(z) - f(z)| \to 0$*, autrement dit que la convergence de* $(f_n)_{n\geq 0}$ *vers* f *est uniforme sur tout compact de* Ω*.*

Alors f *est holomorphe.*

Preuve. Les disques fermés étant compacts, la convergence uniforme sur les compacts montre que f est localement limite uniforme d'une suite de fonctions continues, donc continue.

Ensuite, si λ est un circuit triangulaire inclus dans un disque ouvert contenu dans Ω, le triangle associé étant compact et les f_n holomorphes, on a par le théorème de Goursat

$$|\int_\lambda f(z)dz| = |\int_\lambda [f(z) - f_n(z)]dz| \leq L(\lambda) \sup_{\lambda^\star} |f(z) - f_n(z)| \to 0,$$

et donc par le Théorème de Morera, f est holomorphe. $\square$

4.7: exercices.

Ex. 4.7.1 *(Théorème de Goursat)* : calculer $I(a) = \int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{ch}(z)}{z^2+a^2}dz$ pour $R > 0$ et $a \notin \gamma_R^\star$.

Ex. 4.7.2 *(Propriété de moyenne)*: calculer $I = \int_0^{2\pi} \sin(\frac{\pi}{4} + 5\cos\theta)\mathrm{ch}(5\sin\theta)d\theta$ en utilisant la fonction $\mathcal{R}e(\sin(z))$.

Ex. 4.7.3 : montrer qu'une série entière est holomorphe à l'intérieur de son disque de convergence *(Corollaire du Théorème de Morera)*.

Ex. 4.7.4 : calculer $\int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^8}dz$ *(Formule de Cauchy)*.

5. Zéros des fonctions holomorphes.

5.1 : étude au voisinnage d'un zéro.

L'équivalence entre analycité et holomorphie entraîne le

LEMME 5.1.1. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe et $z_0 \in \Omega$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) : quel que soit $k \geq 0$, $f^{(k)}(z_0) = 0$;

(ii) : dans un voisinnage de z_0 (ou si l'on préfère une petite boule de rayon positif centrée en z_0 et incluse dans Ω), f est identiquement nulle.

PREUVE. Clairement $(ii) \Rightarrow (i)$ car la fonction nulle a toutes ses dérivées nulles.

Réciproquement l'holomorphie entraîne l'analycité, et donc puisque seule la fonction nulle a tous les coefficients de son développement en série entière nuls, il s'ensuit que sur un petit disque de rayon positif, f est nulle si (i), en appliquant **1.5.4.**. $\square$

En découle la

DÉFINITION 5.1.2. *Avec les mêmes notations, $z_0 \in \Omega$ est un zéro isolé de f si $f(z_0) = 0$ mais l'une des deux conditions équivalentes qui précèdent n'a pas lieu.*

PROPOSITION 5.1.3. *Si f a en z_0 un zéro isolé, alors il existe un unique $p \geq 1$, et une g holomorphe sur un petit disque de rayon positif centré en z_0, tels que sur ce petit disque,*

$$f(z) = (z - z_0)^p g(z) \text{ et } g(z_0) \neq 0.$$

PREUVE. Soit $r > 0$ tel que sur $\bar{D}(z_0, r)$, f se développe en série entière sous la forme $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$. Soit ensuite $p > 0$ le plus petit entier $p \geq 0$ tel que $a_p \neq 0$ (un tel p existe par hypothèse).

Notons $g(z) = \sum_{n \geq p} a_n (z - z_0)^{n-p}$ pour $z \in D(a, r)$. La formule d'Hadamard implique alors que le rayon de convergence de la série qui exprime g en z_0 est identique à celui de celle qui exprime f en z_0. Donc g est analytique, donc holomorphe, sur $D(a, r)$. Et sur $D(a, r)$, on a l'identité recherchée. En outre $g(z_0) = a_p \neq 0$ par définition de p.

Pour l'unicité de p, si $p_1 \neq p_2$ et g_1 et g_2 font l'affaire sur un petit disque de rayon positif $D(a, r)$, si par exemple $p_1 > p_2$, alors $f^{(p_1 - 1)}(z_0)$ doit à la fois être nul et ne pas l'être (on applique (L) ci-dessous). C'est impossible (et ce n'est pas shakespearien). $\square$

DÉFINITION 5.1.4. *Si f a en z_0 un zéro isolé, l'entier p de la proposition précédente s'appelle l'ordre de multiplicité de z_0.*

PROPRIÉTÉ 5.1.5. *Si z_0 est un zéro d'ordre p de f et d'ordre q de g, c'en est un d'ordre $p + q$ de fg.*

PREUVE. On applique la formule de Leibniz pour calculer les dérivées d'ordre k de fg, pour $k \leq pq$, et l'on constate que toutes sont nulles sauf celle d'ordre pq, en mettant f et g sous la forme produit de la Proposition 5.1.3.. Rappelons donc la formule de Leibniz :

$$(uv)^{(k)} = \sum_{l=0}^{k} C_n^l u^{(l)} v^{(k-l)} \quad \square \qquad (L)$$

5.2 : distribution des zéros.

Lemme 5.2.1. “Principe des zéros isolés”. *Si z_0 est un zéro isolé de f, il existe $r > 0$ tel que dans $D(z_0, r)$, $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = z_0$.*

Preuve. On applique **5.1.3.** et puisque $(z - z_0)^p = 0 \Leftrightarrow z = z_0$, l'affaire est dans le sac. □

Rappelons qu'un domaine est un ouvert tel que s'il contient deux points, il contient l'image d'un chemin les joignant.

Proposition 5.2.2. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et si Ω est un domaine, alors si f est nulle sur un petit disque de rayon positif inclus dans Ω, elle est identiquement nulle sur Ω.*

Preuve. On pose $\phi(z) = 0$ si z satisfait $f^{(k)}(z) = 0$, $\forall k \geq 0$, et sinon $\phi(z) = 1$. Par le Lemme 5.1.1., si $\phi(z) = 0$, alors ϕ est identiquement nulle sur un voisinnage de z. Et si $\phi(z) \neq 0$, c'est que pour un $k \geq 0$, $f^{(k)}(z) \neq 0$. Alors par continuité de $f^{(k)}$, sur un voisinnage de z, $f^{(k)} \neq 0$, et donc sur un voisinnage de z, ϕ vaut 1.

Donc ϕ prend deux valeurs et est continue. Elle est donc localement constante, donc holomorphe à dérivée nulle. Soient alors $z, z' \in \Omega$, et soit γ un chemin dans Ω allant de z à z'. Alors

$$\phi(z') - \phi(z) = \int_\gamma \phi'(u)du = 0,$$

et donc ϕ est constante, et comme elle vaut 0 quelque part, elle vaut 0 partout. □

Une conséquence immédiate est qu'une holomorphe sur un domaine qui a un zéro non isolé est identiquement nulle.

Appelons $X \subset \Omega$ **localement fini** si quel que soit $K \subset \Omega$ compact (fermé borné), on a $K \cap X$ fini.

Lemme 5.2.3. *Un ensemble localement fini X est fini ou dénombrable.*

Preuve. Si Ω est ouvert, et si $z \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $D(z, 2r) \subset \Omega$. Ensuite, il existe $t(z) \in (\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})$ et $q(z) \in \mathbb{Q}_+^\star$ tel que $|z-t(z)| < q(z) < \frac{r}{2}$. Alors $z \in \bar{D}(t(z), q(z)) \subset D(z, 2r) \subset \Omega$, et donc $\Omega = \cup_{z\in\Omega}\{z\} \subset \cup_{z\in\Omega}\bar{D}(t(z), q(z)) \subset \Omega$. Donc, puisque $\mathbb{Q}^3$ est dénombrable, un ouvert est une union au plus dénombrable de boules fermées.

Chacune de ces boules fermées est un compact, et donc intersecte X en un ensemble fini de points. Donc puisque $X \subset \Omega$, X est une union au plus dénombrable d'ensembles finis, donc fini ou dénombrable. □

Lemme 5.2.4. *Une suite injective $n \mapsto z_n$ est localement finie dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\lim_n |z_n| = +\infty$.*

Preuve. La condition est clairement suffisante, puisque tout compact est inclus dans une boule centrée à l'origine, et qu'une telle boule ne contiendra qu'un nombre fini de points de la suite si $\lim_n |z_n| = +\infty$.

Réciproquement, si la suite est localement finie, alors quel que soit $R > 0$, il ne doit exister qu'un nombre fini d'images de la suite dans $\bar{D}(0, R)$, ce qui, puisque la suite est injective, nécessite qu'au delà d'un certain rang n_0, les z_n ne soient plus dans la boule. $\square$

COROLLAIRE 5.2.5. *Les zéros d'une holomorphe non identiquement nulle dans un domaine constituent un ensemble localement fini.*

PREUVE. Sinon, un compact en contient une infinité, et donc une suite de zéros de f converge dans le domaine. Puisque f est continue, la limite est un zéro, et donc f a un zéro non isolé dans le domaine. Donc f est identiquement nulle (utiliser **5.1.1.**, **5.2.1.** et **5.2.2.**). $\square$

5.3 : principe du prolongement analytique.

PROPOSITION 5.3.1. *Si f et g sont holomorphes sur un domaine Ω, et si $\{f = g\}$ contient un compact infini, alors $f = g$ sur le domaine.*

PREUVE. Un compact infini contient une suite injective qui converge, et donc si $\{f = g\}$ en contient un, alors $f - g$ a un zéro non isolé. $\square$

COROLLAIRE 5.3.2. "PRINCIPE DE SYMÉTRIE". *Soit Δ un domaine symétrique relativement à $\{y = 0\}$, i.e. tel que $z \in \Delta \Leftrightarrow \bar{z} \in \Delta$, et contenant un segment de longueur positive $[x, x']$, avec $x, x' \in \mathbb{R}$. Soit f holomorphe sur Δ. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i):$\forall z \in \Delta,\ f(\bar{z}) = \bar{f}(z)$;
(ii):$x \in \mathbb{R} \cap \Delta \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$.

PREUVE. Notons $g(z) = \bar{f}(\bar{z})$, $z \in \Delta$. Alors

$$\frac{g(z+u) - g(z)}{u} = \overline{\left(\frac{f(\bar{z} + \bar{u}) - f(\bar{z})}{\bar{u}}\right)} \to \overline{f'(\bar{z})},$$

et donc g est holomorphe. Alors (i) signifie que $f = g$, et (ii) signifie que $f = g$ sur le compact infini $[x, x']$. Utiliser **5.3.1.**. $\square$

5.4 : principe du maximum.

PROPOSITION 5.4.1. "PRINCIPE DU MAXIMUM". *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe et $a \in \Omega$. Si $|f|$ a un maximum local en a, alors f est constante au voisinnage de a.*

PREUVE. Soit $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$ avec $r > 0$ et tel que $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$ et $|f(z)| \leq |f(a)|$ sur $D(a, r)$ si $r < R$. On sait que (cf. §**4.4.**) $a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) e^{-int} dt$. Ensuite, si $n < 0$, on pose $a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) e^{-int} dt$. Dans l'espace $L^2([0, 2\pi], dt)$, on interprète $a_n r^n$ comme le $\text{n}^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de $t \mapsto f(a + re^{it})$.

D'autre part, par définition de l'intégrale sur un chemin, si $\gamma_r(t) = a + re^{it}$, et si $n < 0$, alors $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} f(z)(z - a)^{-n-1} dz$. Mais $z \mapsto f(z)(z - a)^{-n-1}$ est holomorphe sur $\bar{D}(a, r)$, donc par le Théorème de Goursat, $\int_{\gamma_r} f(z)(z - a)^{-n-1} dz = 0$.

L'espace $L^2([0,2\pi], \frac{dt}{2\pi})$ admet, muni de sa norme 2, une b.o.n. constituée des fonctions $(t \mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ (cf. cours d'intégration de Licence), et donc nous avons la relation de Parseval (calcul différentiel de Licence) :

$$\| f \|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+e^{it})|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n}.$$

La fonction f a un maximum local en a, et donc $\| f \|_2^2 \leq |f(a)|^2$, et en outre, $a_0 = f(a)$ d'après la formule de Cauchy pour un disque (cf. **4.5.1.**). Donc on a

$$|a_0|^2 + \sum_{n\geq 1} |a_n|^2 r^{2n} \leq |a_0|^2,$$

ce qui montre que $a_n = 0$ si $n \geq 1$, et donc f est localement constante en a. □

Corolaire 5.4.2. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et si Ω est un domaine, alors f est constante sur Ω si elle a un maximum local en un point de Ω.*

Preuve. Par **5.4.1.**, f sera localement constante sur une boule $D(a,r)$. On applique ensuite le principe du prolongement analytique **5.3.1.**. □

Corolaire 5.4.3. "Théorème de d'Alembert, troisième preuve". *Un polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins un zéro dans le plan.*

Preuve. Soit g le polynôme non constant et supposons qu'il n'a pas de zéro. Alors $\frac{1}{g}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et $\lim_{|z|\to+\infty} 1 \,/\, g(z) = 0$. Donc pour R suffisamment grand, $|1 \,/\, g|$ est strictement plus petite que $\max_{|z|\leq R} |1 \,/\, g(z)|$ sur $\mathbb{C} \setminus D(0,R)$.

Alors $1 \,/\, g$ est holomorphe sur $D(0,R)$ et $|1 \,/\, g|$ a un maximum (absolu) dans $D(0,R)$. Par 5.4.1., elle doit être constante, une contradiction. □

5.5 : exercices.

Ex. 5.5.1 : trouver les zéros et leurs ordres de multiplicité des fonctions $z \mapsto \sin(z)$ et $z \mapsto 1 + \cos(z)$.

Ex. 5.5.2 : montrer que si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ sont holomorphes, si Ω est un domaine, et si $fg \equiv 0$ sur Ω, alors ou bien f ou bien g est identiquement nulle sur Ω.

Ex. 5.5.3 : montrer à l'aide du principe de symétrie que, puisque pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a $e^{x+y} = e^x e^y$, alors on a aussi $e^{z+\tilde{z}} = e^z e^{\tilde{z}}$ pour $z, \tilde{z} \in \mathbb{C}$. Retrouver quelques formules de trigonométrie dans le même esprit (extension de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$) (cf. l'Annexe).

6. Points singuliers.

6.1. Points singuliers isolés.

DÉFINITION 6.1.1. "SINGULARITÉ". *Soit $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur l'ouvert Ω sauf en $a \in \Omega$. Nous dirons alors que f présente en a une* **singularité***.*

Nous dirons qu'il s'agit d'une **fausse singularité** *si f est bornée sur un voisinnage épointé de a inclus dans Ω.*

Si par contre f n'est pas bornée au voisinnage de a, nous dirons que a est un **point singulier isolé** *de f.*

Si $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$, nous dirons que a est **un pôle de** f*. Sinon, nous dirons que c'est un* **point singulier essentiel** *de f.*

6.2. Résidu.

LEMME 6.2.1. *Soit $\Delta = D'(a,r)$ avec $r > 0$. Soient $0 < r_1 < r_2 < r$, et soient $\gamma_1(t) = a + r_1 e^{it}$ et $\gamma_2(t) = a + r_2 e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.*

Alors si $f : \Delta \to \mathbb{C}$ est holomorphe, $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$.

PREUVE. On ajoute à $\gamma_1^\star \cup \gamma_2^\star$ les segments $a + [r_1, r_2]$ et $a + [-r_2, -r_1]$. On considère ensuite les plans fendus $P_b = \mathbb{C} \setminus (a + i\mathbb{R}^-)$ et $P_h = \mathbb{C} \setminus (a + i\mathbb{R}^+)$.

Alors $\Delta \setminus P_b$ ou $\Delta \setminus P_b$ est un ouvert étoilé, et on raisonne comme dans la preuve de **4.3.1.**. $\square$

LEMME 6.2.2. *Avec les mêmes notations, si $r_1 < |z - a| < r_2$, on a*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(u)}{(u-z)} du - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(u)}{(u-z)} du.$$

PREUVE. Posons, à z fixé, $g(u) = (f(u) - f(z))(u - z)$ si $u \neq z$, et $g(z) = f'(z)$. Alors comme dans la preuve de **4.5.1.**, on montre que g est holomorphe sur Δ. L'application à g de **6.2.1.** montre que

$$f(z)(\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z) - \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(u)}{(u-z)} du - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(u)}{(u-z)} du.$$

Pour conclure, on calcul ou l'on sait que $\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z) - \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) = 1 - 0 = 1$. $\square$

DÉFINITION 6.2.3. "RÉSIDU". *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, et $a \in \Omega$. Soit $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorphe, et soit $r > 0$ tel que $D'(a,r) \subset \Omega$. Pour $\rho \in]0, r[$, notons $\gamma_\rho(t) = a + \rho e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.*

Alors on appelle **résidu de** f **en** *a la valeur commune (d'après* **6.2.1.***) aux intégrales $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} f(z)dz$, lorsque $0 < \rho < r$, et on le note $Res(\mathbf{f}, \mathbf{a})$*

LEMME 6.2.4. *Le résidu en une fausse singularité est nul.*

PREUVE. Si f est bornée au voisinnage épointé de a, disons par M, alors pour $\rho > 0$ assez petit, $|\mathrm{Res}(f,a)| \leq M\rho$, et donc $\mathrm{Res}(f,a) = 0$. $\square$

6.3. Fausses singularités.

PROPOSITION 6.3.1. *Une $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ présentant en a une fausse singularité est prolongeable en une fonction holomorphe sur Ω tout entier.*

PREUVE. Soit $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Omega$, et soient $0 < r_0 < r_1 < |z-a| < r_2 < r$. Alors ce z étant fixé, $g_z : u \mapsto f(u) \,/\, (u-z)$ est holomorphe sur $D'(a, r_1)$ et présente une fausse singularité en a. Par **6.2.4.**, $\mathrm{Res}(g_z, a) = 0$, et donc par **6.2.2.**,

$$f(z) = \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(u)}{(u-z)} du - \int_{\gamma_{r_0}} \frac{f(u)}{(u-z)} du = \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(u)}{(u-z)} du.$$

Pour conclure, on sait par **2.3.2.** que $z \mapsto \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(u)}{(u-z)} du$ est analytique de rayon de convergence $\geq r_2$, sur $D(a, r_2)$. $\square$

Nous étoffons un peu la définition **6.1.1.** :

DÉFINITION 6.3.2. "POINT SINGULIER". *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe sur un ouvert Ω, et soit $a \in \partial\Omega$, la frontière de Ω (i.e. $\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \overline{\mathbb{C} \setminus \Omega}$).*

Alors s'il existe un disque ouvert D de rayon positif centré en a, et une $g : D \to \mathbb{C}$ holomorphe, et telle que $f = g$ sur $D \cap \Omega$, alors nous dirons que a est un point **régulier** *de la frontière de Ω.*

Sinon, nous dirons que a est un point **singulier**.

Et donc un point singulier isolé est un point isolé de l'ensemble des points singuliers de f.

Aussi, **6.3.1.** nous dit que si f a en a une fausse singularité, alors a est un point régulier de f.

6.4. Etude au voisinnage d'un pôle.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, $a \in \Omega$, et $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Supposons que $r > 0$ soit tel que $D(a,r) \subset \Omega$.

Si a est un pôle de f, alors puisque $\lim_a |f(z)| = +\infty$, il s'ensuit que f peut être supposée non nulle sur $D(a,r)$ (quitte à diminuer r au besoin).

Alors $1 \,/\, f$ est holomorphe sur $D'(a,r)$, et $\lim_a 1 \,/\, f(z) = 0$. Donc $1 \,/\, f$ présente en a une fausse singularité, et il existe un prolongement holomorphe g de $1 \,/\, f$ sur $D(a,r)$, et tel que $g(a) = 0$.

La fonction holomorphe g présente en a un zéro isolé, puisque sur $D'(a,r)$ elle coïncide avec $1 \,/\, f$ qui ne s'annule pas. Et donc par **5.1.3.**, il existe un unique $p \geq 1$ et une h holomorphe sur $D(a,r)$ et ne s'annulant pas, tels que $g(z) = (z-a)^p h(z)$. Il y a donc, localement, un seul entier $p \geq 1$ et une seule fonction holomorphe non nulle w tels que

$$f(z) = \frac{w(z)}{(z-a)^p}, \; z \in D'(a,r).$$

Cet entier p est appelé **l'ordre du pôle** a. Le pôle est dit **simple** si $p = 1$, sinon on dit qu'il est multiple.

Localement toujours, disons sur $D(a, r)$, on peut développer w en série entière en a, mettons $w(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$, $|z-a| < r$. Alors f s'écrit

$$f(z) = \underbrace{\frac{a_0}{(z-a)^p} + \frac{a_1}{(z-a)^{p-1}} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{(z-a)}}_{\textbf{partie singulière}} + \underbrace{\sum_{n\geq p} a_n(z-a)^{n-p}}_{\textbf{partie régulière}}.$$

Proposition 6.4.1. *Si f a en a un pôle d'ordre p, alors Res(f,a) est égal au coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans la partie singulière de f.*

Preuve. On écrit $f = S + R$, où S désigne la partie singulière de f en a. On a alors

$$2i\pi \mathrm{Res}(f,a) = a_0 \int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{(z-a)^p} + \ldots + a_{p-1} \int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z-a} + \int_{\gamma_\rho} R(z)dz.$$

Toutes les intégrales ci-dessus sont nulles car les fonctions que l'on y intègre ont une primitive, sauf $\int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z-a} = 2i\pi \mathrm{Ind}_{\gamma_\rho}(a) = 2i\pi$, et donc

$$\mathrm{Res}(f,a) = a_{p-1}. \quad \square$$

Nous passons maintenant à quelques cas génériques pour le calcul des résidus :

• : **Pôle simple**. Localement en a, $f(z) = g(z) \,/\, (z-a)$, et donc la partie singulière de f s'écrit $g(a) \,/\, (z-a)$. En dérivant $(z-a)g(z)$ en a, il vient $g(a) = \lim_a (z-a)f(z)$, et donc

$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a} (z-a)f(z).$$

On peut aussi exprimer f en a sous la forme $\frac{g(z)}{(z-a)h(z)}$ avec g et h localement holomorphes en a, et $g(a) \neq 0$ et $h(a) \neq 0$. Alors

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h(a)}.$$

•• : **Pôle multiple**. Localement en a on a $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p}$ si l'ordre du pôle a est p. Si nous développons $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$, alors

$$\mathrm{Res}(f,a) = a_{p-1} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(p-1)!} \left[(z-a)^p f(z)\right]^{(p-1)}(z).$$

Mais dans ce cas, cette dérivée $m - 1^{\text{ième}}$ est aussi coûteuse à calculer, en général, que de déterminer le développement en série de g. On aura donc tendance à développer en série tout de suite.

6.5. Point singulier essentiel.

Le comportement de f en un pôle est assez simple (**5.1.3.**). Dans le cas d'une singularité essentielle, le comportement, d'emblée, est chaotique, et nous avons la précision suivante :

THÉORÈME 6.5.1. "WEIERSTRASS". *Si $a \in \Omega$, et $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et présente une singularité essentielle en a, alors l'image par f de tout voisinnage épointé de a est dense dans $\mathbb{C}$.*

PREUVE. Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset \Omega$ et qu'il existe $b \in \mathbb{C}$ et $\delta > 0$ tels que $f(D'(a, r)) \subset \mathbb{C} \setminus \bar{D}(b, \delta)$, autrement dit que $b \notin \overline{f(D'(a, r))}$. Alors $g(z) := \frac{1}{f(z)-b}$ est holomorphe sur $D'(a, r)$, et g étant bornée sur $D'(a, r)$, elle présente une fausse singularité en a. Mais f n'étant pas bornée au voisinnage de a, g ne peut se prolonger en a que par 0, et donc a est un pôle de $f - b$, par suite de f elle-même, une contradiction. $\square$

6.6. Partie singulière.

Notons $\Delta = D'(a, r)$, et soit $f : \Delta \to \mathbb{C}$ holomorphe. Si a est un pôle de f, nous savons que $f = R + S$ où S est la partie singulière de f, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, avec $\lim_{|z|\to\infty} S(z) = 0$, et R est holomorphe sur $D(a, r)$.

Supposons que l'on puisse écrire $f = S_1 + R_1$ avec S_1 et R_1 ayant les propriétés précitées au sujet de R et S. Alors $R - R_1 = S_1 - S$, et donc $D := S - S_1$ a une fausse singularité en a, se prolonge donc en une fonction entière, et telle que $\lim_{|z|\to\infty} D(z) = 0$. Donc D est constante, et vaut 0, par le Théorème de Liouville **4.4.2.**. Donc $R = R_1$ et $S = S_1$.

Notons, si $0 < \rho < r$, $\gamma_\rho(t) = a + \rho e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Si $z \neq a$ et $0 < \rho < |z - a|$, alors en posant

$$S(z) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(u)}{u - z} du$$

on obtient une fonction analytique en z, dont la définition ne dépend pas de ρ, par **6.2.1.** et **2.3.2.**.

La fonction S ainsi définie est bien holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Ensuite, dès que $|z - a| > r$, on peut fixer $\rho = \frac{r}{2}$ par exemple, et obtenir, puisque f est continue sur $\gamma_{\frac{r}{2}}$, que $|S(z)| \le \frac{rM}{2|z|-r}$, où $M = \| f \|_{\infty,\gamma_\rho}$, et donc $|S(z)| \to 0$ si $|z| \to \infty$.

Pour conclure, si $z \in \Delta$, soient ρ et ρ' tels que $0 < \rho' < |z - a| < \rho < r$. Alors par **6.2.2.**,

$$f(z) - S(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(u)}{u - z} du$$

est holomorphe en a.

Nous avons donc montré que la décomposition $f = S + R$ avec les conditions précitées concernant S et R existe dès que f a en a une singularité isolée. Nous continuerons d'appeler S la partie singulière de f en a.

Nous pouvons quelque peu généraliser ce qui précède :

Proposition 6.6.1. *Soit f holomorphe sur $D'(a,r)$ présentant en a une singularité isolée. Alors la partie singulière de f en a se met sous la forme*

$$S(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{(z-a)^n},$$

où la série converge normalement sur toute couronne $|z-a| \geq R$, $R > 0$.

Nous disons ici que $S(z)$ est développée en série de Laurent en a.

De plus, le point a est un pôle si tous les coefficients a_n sont nuls à partir d'un certain rang.

Preuve. Décomposons $f = S + R$, et notons $T(z) = S(a + \frac{1}{z})$ pour $z \neq 0$. Nous avons $\lim_0 T(z) = 0$, et donc en posant $T(0) = 0$, on obtient une fonction entière T nulle en 0. Pour $r > 0$, $T(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ sur $\bar{D}(a,r)$, la convergence étant normale sur $\bar{D}(a,r)$ (cf. **4.3.2.**). Pour $z \neq a$, remarquons que $T(\frac{1}{z-a}) = S(z)$, et donc

$$S(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{(z-a)^n},$$

la convergence étant normale sur toute couronne $|z-a| \geq \frac{1}{r}$.

Si de plus a est un pôle de f d'ordre m, alors il existe g holomorphe sur $D(a,r)$ telle que $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$, et donc si localement nous développons g en série entière, $g(z) = \sum_p b_p(z-a)^p$, nous obtenons, par unicité de la décomposition en partie singulière - partie régulière, $S(z) = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{b_p}{(z-a)^{m-p}}$.

Inversement, si f a une partie singulière de la forme $S(z) = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{b_p}{(z-a)^{m-p}}$, avec $b_0 \neq 0$, alors manifestement f a un pôle d'ordre m en a, puisque dans ce cas f s'écrit $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ avec $m \geq 1$ et g holomorphe. □

Proposition 6.6.2. "Résidu en un point singulier isolé". *Sous les hypothèses de* **6.6.1.**, *le résidu de f en a est égal au coefficient du terme en $\frac{1}{(z-a)}$ du développement en série de Laurent de sa partie singulière.*

Preuve. Puisque par **6.6.1.**, il existe $0 < r_1 < r$ tels que $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$, la convergenceétant normale pour $r_1 \leq |z-a| \leq r$, si nous choisissons $r_1 < \rho < r$ dans **6.2.3.**, nous obtenons directement $\mathrm{Res}(f,a) = a_{-1}$. □

6.7. Exercices.

6.7.1 : montrer que $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ a en 0 une fausse singularité.
6.7.2 : déterminer les singularités de $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$. Sont-ce des pôles ou des singularités essentielles?
6.7.3 : déterminer celles de $z \mapsto \sin(\frac{1}{z})$; même question.
6.7.4 : calculer les résidus de $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ en i et $-i$.
6.7.5 : calculer les résidus suivants : $\mathrm{Res}(\frac{e^z}{1+z^2}, i)$, $\mathrm{Res}(\frac{z^3}{1+z^4}, \zeta)$, où ζ est une racine quatrième de l'unité,
6.7.6 : montrer que si une fonction entière est telle que $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = +\infty$, alors c'est un polynôme (*étudier* $f(\frac{1}{z})$).

7. Théorème des résidus.

7.1 : Lemmes préliminaires.

LEMME 7.1.1. *Si f est holomorphe sur l'ouvert Ω sauf en un ensemble S de points singuliers isolés, alors S est localement fini.*

PREUVE. Si tel n'est pas le cas, un compact de Ω contient une suite convergente de points singuliers de f. La limite est un point singulier non isolé de f, une contradiction. $\square$

Les points singuliers isolés sont d'habitude considérés comme faisant partie de l'ensemble d'étude d'une fonction holomorphe.

LEMME 7.1.2. "L'ENCLOS ÉTOILÉ". *Dans un ouvert étoilé, tout compact s'inclut dans un ouvert étoilé borné dont l'adhérence est incluse dans l'ouvert initial.*

PREUVE. Soit z_0 un centre de l'ouvert étoilé Ω, et soit $K \subset \Omega$ un compact. Chaque point de K est dans un disque ouvert de rayon positif d'adhérence incluse dans Ω, et K, par compacité, est recouvert par un nombre fini de ces disques, disons les $\bar{D}(z_i, r_i)$, $1 \le i \le n$.

Soit $r > 0$ tel que $z_0 \in D(z_0, r) \subset \bar{D}(z_0, r) \subset \Omega$, et pour chaque $1 \le l \le n$, soit K_l un compact étoilé en z_0 d'intérieur contenant z_0 et $D(z_l, r_l)$, contenu dans Ω, et construit comme suit :

– si $z_0 \in D(z_l, r_l)$, alors $K_l = \bar{D}(z_l, r_l)$ convient ;

– sinon, unissons le petit disque centré en z_0, le disque $D(z_l, r_l)$, et l'union des segments joignant z_0 à un point de $D(z_l, r_l)$. Nous obtenons alors un ouvert étoilé borné, dont l'adhérence K_l convient (faire un dessin).

Pour terminer, l'union $\cup_{i=1}^{n} K_i$ est un compact étoilé contenu dans Ω dont l'intérieur contient K. $\square$

COROLLAIRE 7.1.3. *Si f est holomorphe sur l'ouvert étoilé Ω sauf sur un ensemble de singularités isolées S, et si γ est un chemin fermé dans Ω ne rencontrant pas S, alors l'ensemble des $z \in S$ tels que $Ind_\gamma(z) \neq 0$ est fini.*

PREUVE. On inclut $\gamma^\star$ (compact) à l'intérieur d'un compact étoilé $\overline{\Omega_0}$, lequel ne contient qu'un nombre fini de points de S (on a appliqué **7.1.1** et **7.1.2**).

Alors si $z \in S \setminus \Omega_0$, z est dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^\star$. Ainsi $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \neq 0$ qu'éventuellement pour $z \in S \cap \Omega_0$ qui est fini. $\square$

7.2 : le Théorème des Résidus (ouvert étoilé).

THÉORÈME DES RÉSIDUS 7.2.1. *Soit f holomorphe sur l'ouvert étoilé Ω sauf peut-être présentant des singularités isolées aux points de l'ensemble $S \subset \Omega$. Alors si γ est un chemin fermé tracé dans ω et ne rencontrant pas S,*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)dz = \sum_{z \in S} Ind_\gamma(z) Res(f, z).$$

Remarquons que par **7.1.3** la somme ci-dessus n'a qu'un nombre fini de termes non nuls.

Preuve. Avec les Lemmes **7.1.1** et **7.1.2**, quitte à diminuer Ω, on peut supposer que $S = \{z_1, \dots, z_n\}$ est fini.

Notons S_i la partie singulière de f en z_i, et remarquons que

$$g = f - \sum_{k=1}^{n} S_k$$

est en fait holomorphe sur Ω puisqu'elle présente en chaque z_k une fausse singularité.

Alors $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma S_k(z)dz$ par le Théorème de Goursat.

D'autre part, $S_k(z) = \sum_{l\geq 1} \frac{b_{k,l}}{(z-z_k)^l}$, la convergence étant normale sur toute couronne de la forme $|z - z_k| > r_k (> 0)$. On peut choisir tous les r_k égaux à un petit $r > 0$ suffisamment petit pour que pour chaque k, $\bar{D}(z_k, r) \cap \gamma^\star = \emptyset$.

Alors par convergence normale, on peut intervertir intégrale et série et calculer que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma S_k(z)dz = \sum_{l\geq 1} \frac{b_{k,l}}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_k)^l}.$$

Dans la série ci-dessus, tous les termes correspondant à $l \geq 2$ sont nuls puisqu'alors $z \mapsto \frac{1}{(z-z_k)^l}$ possède une primitive. Au bout du compte, nous obtenons que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz = \sum_k \frac{b_{k,1}}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_k)} = \sum_k Res(f, z_k)\mathrm{Ind}_\gamma(z_k)$$

par application de **6.2.3**, car $b_{k,1} = Res(f, z_k)$. $\square$

7.3 : dénombrement des zéros et des pôles.

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe sur l'ouvert Ω, soit γ un chemin fermé tel que $\gamma^\star \subset \Omega$, et supposons que f ne s'annule pas sur $\gamma^\star$. Alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{f\circ\gamma} \frac{du}{u} = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0)$$

représente l'indice du chemin fermé $f \circ \gamma$ relativement à l'origine.

L'intégrale ci-dessus représente, intuitivement, la variation de l'argument de $f(z)$ lorsque z suit γ, divisé par 2π. Ceci justifie l'intérêt que l'on porte à de telles intégrales.

La fonction $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}$ s'appelle, là où elle est définie, la *dérivée logarithmique* de f. Elle est holomorphe là où f l'est et ne s'annule pas.

La terminologie vient de ce que, si $f(z) = exp(u(z))$ avec u holomorphe, alors $\frac{f'}{f} = u'$.

La dérivée logarithmique, même si f n'est pas l'exponentielle d'une holomorphe, conserve les propriétés algébriques usuelles :

$$\begin{array}{llll} \text{si} & f = f_1 f_2 & \text{alors} & \frac{f'}{f} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}; \\ \text{si} & f = g^k & \text{alors} & \frac{f'}{f} = k\frac{g'}{g}. \end{array}$$

Lorsque f présente en a un zéro ou un pôle, i.e. f se met sous la forme, localement en a, $f(z) = (z-a)^k g(z)$ avec g holomorphe non nulle et $k \neq 0$, alors

$$\frac{f'}{f} = \frac{k}{(z-a)} + \frac{g'}{g},$$

et donc $\frac{f'}{f}$ présente en a un pôle simple de résidu k, et ce résidu est tel que :
– si $k > 0$, f a en a un zéro d'ordre k;
– si $k < 0$, f a en a un pôle de multiplicité $-k$.

Poursuivons par le

Lemme 7.3.1. *Un domaine Ω privé d'une partie localement finie S, $\Omega \setminus S$, est un domaine.*

Preuve (esquisse). Soient z_0 et $z_1 \in \Omega \setminus S$. Il existe un chemin γ joignant z_0 à z_1 dans Ω. S'il ne rencontre pas S, il convient pour joindre ces deux mêmes points, mais dans $\Omega \setminus S$.

Sinon, puisque $\gamma^\star$ est compact, il ne contient qu'un nombre fini de points de S. On peut même en dire autant de $\partial(\gamma, r) := \{d(z, \gamma^\star) \leq r\}$, où $d(z, \gamma^\star) = \min\{|z-u| : u \in \gamma^\star\}$, en choisissant $r > 0$ de sorte à ce que $\partial(\gamma, r) \subset \Omega$.

Soit $\delta > 0$ tel que pour chaque $s \in S \cap \partial(\gamma, r)$, on ait $S \cap \bar{D}(s, \delta) = \{s\}$. Alors partons de z_0 et suivons γ : si nous rencontrons, ce faisant, un petit disque fermé $\bar{D}(s, \delta)$, suivons le bord de ce petit disque au lieu de suivre γ, jusqu'à ce que nous retrouvions sur ce bord le chemin γ qui ressort du petit disque.

Et ainsi de suite un nombre fini de fois : nous avons fait des “déviations” pour éviter S en allant de z_0 à z_1 : il n'y en a eu qu'un nombre fini, chacune était un bout de chemin, et donc le parcours effectué l'a été le long d'un chemin joignant z_0 à z_1 dans $\Omega \setminus S$. $\square$

Nous savons que l'ensemble des pôles d'une fonction holomorphe sur un ouvert est localement fini. Introduisons la

Définition 7.3.2. *Nous appelons fonction méromorphe une fonction holomorphe sur un ouvert sauf en un certain nombre de points de l'ouvert où elle a éventuellement des pôles.*

Remarquons d'emblée que la dérivée d'une méromorphe l'est, et que la somme et le produit de deux méromorphes le sont.

Remarquons que par le Lemme **7.3.1**, le principe du prolongement analytique s'applique aux fonctions méromorphes, et donc si g est méromorphe sur un domaine non identiquement nulle, alors l'ensemble de ses zéros est aussi localement fini.

Si g est méromorphe sur un domaine Ω, si elle n'est pas identiquement nulle, si P désigne l'ensemble de ses pôles, et si Z désigne celui de ses zéros, alors Z et P sont localement finis dans Ω, et en considérant la fonction $1 \,/\, f$, on obtient une méromorphe dont l'ensemble des zéros est P et celui des pôles est Z.

Donc l'ensemble des méromorphes sur un domaine constitue un corps.

Théorème de l'argument 7.3.3. *Si Δ est un ouvert étoilé, et si f est méromorphe non identiquement nulle sur Δ, d'ensemble de pôles P et de zéros Z, si γ est un chemin fermé dans Δ ne rencontrant ni P ni Z, et si pour $a \in Z \cup P$, nous notons $m(a)$ son ordre de multiplicité, alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in Z} m(a)Ind_\gamma(a) - \sum_{a\in P} m(a)Ind_\gamma(a).$$

Preuve. C'est le théorème des résidus **7.2.1** en tenant compte des remarques et des commentaires qui précèdent dans ce paragraphe. □

Nous allons passer au Théorème de Rouché[4]. D'abord un

Lemme 7.3.4. *Soient γ_1 et γ_2 deux chemins fermés ne passant pas par zéro et paramétrés par le même intervalle. Alors $\gamma_1\gamma_2 : t \mapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t)$ est un chemin fermé ne passant pas par 0, et*

$$Ind_{\gamma_1\gamma_2}(0) = Ind_{\gamma_1}(0) + Ind_{\gamma_2}(0).$$

Preuve. Il suffit de paramétrer et de remarquer que

$$\frac{(\gamma_1\gamma_2)'}{\gamma_1\gamma_2} = \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} + \frac{\gamma_2'}{\gamma_2}.$$

□

Théorème de Rouché 7.3.5. *Soit Δ un ouvert étoilé, et soit γ un chemin fermé dans Ω tel que pour tout $z \notin \gamma^\star$, $Ind_\gamma(z) \in \{0,1\}$. Soient f et g deux fonctions holomorphes dans Δ et vérifiant :*

$$\begin{cases} \textit{1. } f \textit{ ne s'annule pas sur } \gamma^\star; \\ \textit{2. } \forall z \in \gamma^\star,\ |g(z)| < |f(z)|. \end{cases}$$

Alors f et $f+g$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de $\gamma^\star$, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité.

Preuve. Remarquons que $f+g \neq 0$ sur $\gamma^\star$. Appelons N le nombre de zéros de f à l'intérieur de $\gamma^\star$, et N_1 celui de $f+g$. Par le théorème de l'argument, on a

$$N = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \text{ et } N_1 = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}dz.$$

[4]Rien dans l'encyclopédie à son propos.

Supposons que γ soit paramétré par l'intervalle $[\alpha, \beta]$, et introduisons les deux nouveaux chemins fermés définis par

$$\lambda(t) = f(\gamma(t)),\ \lambda_1(t) = f(\gamma(t)) + g(\gamma(t)),\ t \in [\alpha, \beta].$$

On a alors $N = \mathrm{Ind}_\lambda(0)$ et $N_1 = \mathrm{Ind}_{\lambda_1}(0)$. On peut en outre écrire $\lambda_1(t) = \lambda(t)\delta(t)$ où δ est le chemin fermé défini par

$$\delta(t) = 1 + \frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))},\ t \in [\alpha, \beta].$$

Par le Lemme **7.3.4**, on a

$$\mathrm{Ind}_\lambda(0) + \mathrm{Ind}_\delta(0) = \mathrm{Ind}_{\lambda_1}(0).$$

Pour conclure, on remarque que $\delta^\star \subset D(1,1)$ et donc $\mathrm{Ind}_\delta(0) = 0$ par **2.2.1**. $\square$

Nous pouvons maintenant donner notre quatrième démonstration du

Théorème de d'Alembert 7.3.6. *Je vous laisse l'énoncer!*

Preuve. Soit $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ un polynôme non constant. Alors $\lim_{|z|\to\infty}(a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0) \ / \ z^n = 0$, et donc pour $R > 0$ assez grand, $|a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0| < |z^n|$ sur γ_R. Par le théorème de Rouché, P a le même nombre de zéros que $z \mapsto z^n$ dans $D(0, R)$, lequel en a n (avec multiplicité). Donc P s'annule. $\square$

7.4 : le Théorème de l'image ouverte.

Théorème de l'image ouverte 7.4.1. *L'image d'un domaine par une fonction holomorphe non constante est un domaine.*

Preuve. Notons Δ le domaine, et soit $f : \Delta \to \mathbb{C}$ holomorphe. Commençons par montrer que si $u_0, u_1 \in f(\Delta)$, il existe un chemin γ les joignant dans $f(\Delta)$. Pour cela choisissons des antécédents $z_0, z_1 \in \Delta$ tels que $f(z_0) = u_0$ et $f(z_1) = u_1$. Soit ensuite δ un chemin dans Δ joignant z_0 à z_1. Posons alors $\gamma = f \circ \delta$. La fonction f étant dérivable au sens complexe, il s'ensuit que γ est continu et dérivable par morceaux, puisque δ l'est et que f ne pose pas de complications de ce point de vue là. Et donc γ est un chemin joignant u_0 à u_1 dans $f(\Delta)$.

Il nous reste à montrer que $f(\Delta)$ est ouvert. En fait nous allons montrer plus :

Lemme 7.4.2. *Soit $f : \Delta \to \mathbb{C}$ holomorphe sur le domaine Δ, et non constante. Soit $z_0 \in \Delta$ et posons $w_0 = f(z_0)$. Alors z_0 est un zéro, isolé, de $f - w_0$. Et si m désigne son ordre de multiplicité, alors il existe $r, s > 0$ tels que*
(i) : pour tout w tel que $|w - w_0| < s$, l'équation $f(z) = w$ a exactement m solutions dans le disque $|z - z_0| < r$;
(ii) : si en outre $w \neq w_0$, ces zéros sont tous distincts.

Preuve de **7.4.2**. Par le principe de prolongement analytique, puisque f n'est pas constante, $f - w_0$ a ses zéros isolés. Et f' n'étant pas nulle, f' a ses zéros isolés aussi (si elle en a).

Donc il existe $\rho > 0$ tel que $0 < |z - z_0| < \rho \Rightarrow (f(z) - w_0)f'(z) \neq 0$. Soit ensuite $0 < r < \rho$ et soit $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. On peut aussi choisir $\rho > 0$ assez petit pour être sûr que $\bar{D}(z_0, \rho) \subset \Delta$.

Par le théorème de l'argument on a $m = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z)-w_0} dz$. Soit alors $\delta = f \circ \gamma_r$. Alors $w_0 \notin \delta$ et la formule précédente montre que $m = \mathrm{Ind}_\delta(w_0)$.

Soit alors $s > 0$ tel que $D(w_0, s) \cap \delta^\star = \emptyset$. La fonction $w \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_\delta \frac{dz}{z-w}$ est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \delta^\star$, et en l'occurrence, puisque $D(w_0, s) \cap \delta^\star = \emptyset$, elle vaut m sur $D(w_0, s)$.

Et donc en invoquant de nouveau le théorème de l'argument, on a (i). Pour (ii), par choix de r, on a $f' \neq 0$ sur $D'(z_0, r)$. $\square$

Fin de la preuve du théorème de l'image ouverte : étant donné $z_0 \in \Delta$, on peut, par le Lemme qui précède, trouver $s > 0$ tel que $D(f(z_0), s) \subset f(\Delta)$, ce qui montre que $f(\Delta)$ est ouvert. $\square$

7.5 : le Théorème d'inversion locale.

Le théorème qui suit est le cas particulier d'un théorème d'inversion locale plus général, et qui concerne les applications différentiables entre espaces de Banach. Nous bénéficions ici de l'implication "*dérivable* $\Rightarrow$ $\mathcal{C}^\infty$", qui en général n'est pas vérifiée.

Rappelons qu'un voisinnage d'un point est un sous-ensemble contenant un ouvert contenant le point en question.

Théorème d'inversion locale. *Soit f holomorphe sur un domaine Δ et soit $z_0 \in \Delta$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe un voisinnage $U \subset \Delta$ de z_0 tel que $f(U)$ soit un ouvert contenant $f(z_0)$ et que $f : U \to f(U)$ soit une bijection d'inverse holomorphe (en fait on peut choisir U et $f(U)$ ouverts).*

Preuve. On applique **7.4.2** et puisque $f'(z_0) \neq 0$, il existe $r > 0$ et $s > 0$ tels que l'équation $f(z) = w$ ait une unique solution dans $D(z_0, r)$ pour $w \in D(f(z_0), s)$. Posons alors $V = D(f(z_0), s)$ et $U = f^{-1}(V) \cap D(z_0, r)$.

Puisque f est continue, à la fois U et V sont ouverts, et par les remarques qui précèdent (applications de **7.4.2**), la restriction $f : U \to V$ est bijective.

Par **7.4.2**, à l'instar de l'argument développé dans la fin de la preuve de **7.4.1**, on voit que cette restriction est une application ouverte, c'est à dire que l'image d'une petite boule ouverte incluse dans U est un ouvert contenu dans V.

Ceci montre que $f^{-1} : V \to U$ est continue. Ensuite, considérons $w, w_1 \in V$ et notons z et z_1 leurs images respectives par f^{-1}. Supposons que $w \neq w_1$ et remarquons que

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_1)}{w - w_1} = \left(\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} \right)^{-1}.$$

Puisque f^{-1} est continue en w_1, il vient que $z \to z_1$ si $w \to w_1$, et l'identité ci-dessus permet alors de conclure que

$$\exists (f^{-1})'(w_1) = \left(f'(f^{-1}(w_1))\right)^{-1}$$

si l'on prend soin de noter que $f' \neq 0$ sur U, par construction dans la preuve de **7.4.2**. $\square$

Le théorème d'inversion locale précédent a une forme globale :

Théorème d'inversion globale. *Si f est holomorphe et injective sur le domaine Δ, alors $f : \Delta \to f(\Delta)$ est bijective d'inverse holomorphe.*

Preuve. D'après la preuve de **7.4.2**, si $z \in \Delta$ et si $f'(z) \neq 0$, alors f n'est pas injective. Donc $f' \neq 0$ est nécessaire.

Alors $f : \Delta \to f(\Delta)$ est bijective et en tout point de Δ, nous pouvons appliquer le théorème d'inversion locale. Nous savons d'autre part que $f(\Delta)$ est un domaine. Au bout du compte $f^{-1} : f(\Delta) \to \Delta$ est définie sur un domaine et en chaque point de celui-ci, elle est dérivable. $\square$

7.6 : exercices.

Ex. 7.6.1 : montrer que $z \mapsto \sin z$ a un pôle simple en chaque $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. En déduire que $z \mapsto \mathrm{cotan} z$ a une singularité isolée en chaque $k\pi$, et calculer son résidu en $k\pi$.

Ex. 7.6.2 : on considère l'équation $e^{-z} + z - \lambda = 0$, où λ est un paramètre complexe. Montrer que quel que soit λ, elle a une solution unique dans le demi-plan $\mathcal{R}e(z) > 0$ (*Indication* : utiliser Rouché avec le sous-ensemble $\{\mathcal{R}e(z) \geq 0\} \cap \{|z| \leq R\}$).

8. Application au calcul des intégrales.

Nous allons décrire quelques cas typiques où l'on pourra calculer la valeur d'une intégrale d'une fonction réelle sans calculer de primitive de la fonction supposée intégrée, mais en déterminant un contour à "faire tendre vers $+\infty$", et en interprétant l'intégrale comme une somme de résidus...

Le lecteur est invité à vérifier que pour les chemins utilisés dans ce Chapitre, les indices sont soit 0 soit 1.

8.1 : intégrales du premier type.

Intégrales de la forme

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt, \tag{T1}$$

où $R(x, y)$ désigne une fraction rationnelle en x et y sans pôle sur le cercle $\{x^2+y^2=1\}$.

On paramètre le cercle par $t \mapsto e^{it} = \gamma_1(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, et on remarque que si $z = e^{it}$, $R(\cos t, \sin t)dt = R(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i})\frac{dz}{iz} = G(z)dz$.

Ensuite G est méromorphe sur $\mathbb{C}$, puisque ses pôles, en nombre fini, sont isolés, et qu'ailleurs qu'en un pôle, elle est holomorphe.

Donc le Théorème des Résidus **7.2.1** s'applique, et nous obtenons

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \int_{\gamma_1} G(z)dz = 2i\pi \sum_a Res(G, a),$$

la somme étant étendue aux pôles de $z \mapsto \frac{1}{iz}R(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i})$ intérieurs au disque de centre 0 et de rayon 1.

8.2 : intégrales du second type.

Intégrales de la forme

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t)dt, \tag{T2}$$

où R est une fraction rationnelle sans pôle réel, et où l'on suppose que l'intégrale de Riemann généralisée converge, à savoir que $\lim_{x\to\pm\infty} xR(x) = 0$.

On considère alors le chemin γ^ρ union de deux chemins γ_1^ρ et γ_2^ρ, $\gamma_1^\rho(t) = \rho e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, et $\gamma_2^\rho(t) = t$, $-\rho \leq t \leq \rho$.

Nous avons alors $\int_{\gamma^\rho} R(z)dz = \int_{\gamma_1^\rho} R(z)dz + \int_{-\rho}^{\rho} R(x)dx = 2i\pi \sum_{y>0} Res(R, z)$, la somme étant étendue aux pôles de R situés dans le demi-plan ouvert $y > 0$, si ρ est assez grand.

Le truc va consister, puisque $\lim_{\rho\to+\infty} \int_{-\rho}^{\rho} R(x)dx = I$, à montrer que

$$\lim_{\rho\to+\infty} \int_{\gamma_1^\rho} R(z)dz = 0.$$

Remarquons au passage que si nous parcourons le segment en sens opposé, et si nous y joignons le demi-cercle $\{|z| = \rho,\ Arg(z) \in [\pi, 2\pi]\}$ paramétré par disons γ_3^ρ, un calcul similaire, mais en tenant compte de l'orientation, montre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = -2i\pi \sum_{y<0} Res(R, z) + \lim_{\rho\to+\infty} \int_{\gamma_3^\rho} R(z)dz,$$

ce qui redonne par les $y < 0$ la valeur de I à condition de montrer, comme nous l'avons annoncé dans le cas $y > 0$, que la limite impliquée est nulle. Ceci va résulter d'un

Lemme 8.2.1. *Soit f une fonction continue dans le secteur angulaire $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$, où r et θ désignent le module et l'argument d'un nombre complexe z. Supposons que $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$ (respectivement que $\lim_{|z|\to 0} zf(z) = 0$). Si $\gamma_{r,\theta_1,\theta_2}(t) = re^{it}$, $\theta_1 \le t \le \theta_2$, alors*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{r,\theta_1,\theta_2}} f(z)dz = 0 \ (\textit{respectivement} \ \lim_{r\to0^+} \int_{\gamma_{r,\theta_1,\theta_2}} f(z)dz = 0).$$

Preuve. Faisons le cas $r \to +\infty$, l'autre se traitant de façon similaire. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Alors il existe $r_0 > 0$ tel que $r > r_0 \Rightarrow r|f(z)| \le \varepsilon$ si $z \in \gamma^\star_{r,\theta_1,\theta_2}$. Mais alors

$$\left| \int_{\gamma_{r,\theta_1,\theta_2}} f(z)dz \right| \le (\theta_2 - \theta_1)\varepsilon.$$

□

8.3 : intégrales du troisième type.

Il s'agit d'intégrales du type

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx, \tag{T3}$$

où f est holomorphe au voisinnage de tout point du demi-plan $y \ge 0$, sauf peut-être en un nombre fini de points. Nous allons séparer l'étude des intégrales du type (T3) selon que f présente sur l'axe $y = 0$ des singularités ou pas. Toutefois les résultats sont regroupés dans le paragraphe "intégrales du type (T3)" dans la mesure où après épluchage on verra que le fruit est le même. Bon appétit.

8.3.1 : pas de singularité sur l'axe.

Evidemment vous aurez remarqué que les questions de convergence de l'intégrale I n'ont pas même été soulevées.

PROPOSITION 8.3.1.1. *Supposons que* $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$ *pour* $y \geq 0$. *Alors, sans autre hypothèse que celles propres à ce sous-paragraphe, on a*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)e^{ix}dx = 2i\pi \sum_{y\geq 0} Res(f(z)e^{iz}, a).$$

Nous avons donc la convergence des parties principales de Cauchy.

Observons que ci-dessus si $f \in \mathcal{L}^1$(*Lebesgue sur* $\mathbb{R}$), alors la limite est égale à l'intégrale I, qui existe en tant qu'intégrale de Riemann généralisée absolument convergente.

Remarquons aussi que l'intégrale peut être convergente sans être absolument convergente. Il se peut même que la limite ne soit qu'une partie principale de Cauchy.

PREUVE. Nous reprenons le contour du second type et observons que $|e^{iz}| \leq 1$ dans le demi-plan $y \geq 0$. La convergence résultera si nous montrons que

LEMME 8.3.1.2. *Soit* f *une fonction définie dans un secteur du demi-plan* $y \geq 0$. *Si* $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$ *l'intégrale* $\int f(z)e^{iz}dz$ *étendue à l'arc de cercle de centre* 0*, de rayon* ρ*, contenu dans un secteur angulaire donné du demi-plan* $y \geq 0$*, tend vers* 0 *lorsque* $\rho \to +\infty$.

PREUVE DE 8.3.1.2. Notons $z = \rho e^{i\theta}$, avec $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$. Notons $M(\rho) = \sup_{\substack{|z|=\rho,\\ Arg(z)\in[\theta_1,\theta_2]}} |f(z)|$. Alors

$$\left| \int_{\gamma_{\rho,\theta_1,\theta_2}} f(z)e^{iz}dz \right| \leq M(\rho) \int_0^{\pi} \rho e^{-\rho\sin\theta}d\theta.$$

Reste à montrer que le majorant ci-dessus tend vers 0. Montrons qu'en fait, ce qui suffira,

$$\int_0^{\pi} \rho e^{-\rho\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho e^{-\rho\sin\theta}d\theta \leq \pi.$$

L'égalité ci-dessus résulte de la symétrie $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)$. Ensuite, observons que si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, alors $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$, ce qui implique que $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho e^{-\rho\sin\theta}d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}r\theta}rd\theta \leq \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2}{\pi}r\theta}rd\theta = \frac{\pi}{2}$. □

8.3.1.1 en découle directement. □

8.3.2 : des singularités sur l'axe.

Les arguments de §*8.3.1.* fonctionnent, si ce n'est qu'il y a des singularité sur l'axe. Nous allons en fait traiter de l'existence d'une singularité en l'origine, les autres singularités, s'il en est, se traiteront sur le modèle, avec bon sens et discernement.

On va donc reprendre le contour du paragraphe précédent, avec ρ assez grand, mais il va falloir éviter 0. Pour cela, enlevons du segment $[-\rho, +\rho]$ le sous-segment $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, et remplaçons ce petit sous-segment par un demi-arc de cercle $-\gamma_\varepsilon$, où $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$, avec $0 \leq t \leq \pi$.

LEMME 8.3.2.1. *Supposons que g soit holomorphe au voisinnage de* 0 *et présente en* 0 *un pôle simple. Alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz = i\pi Res(g,0).$$

PREUVE. On décompose $g = \frac{\alpha}{z} + h(z)$ avec h holomorphe et $\alpha = Res(g,0)$, puis on intègre chacun des deux morceaux séparément sur γ_ε. La longueur de γ_ε tend vers 0 et h est continue donc bornée au voisinnage de 0, ce qui fait que l'intégrale pour h converge vers 0. Pour l'autre, il suffit de paramétrer pour trouver à la main que

$$\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\alpha}{z}dz = i\pi\alpha.$$

□

Pour conclure ce sous-sous-paragraphe, notons que si f a un pôle simple en l'origine, alors son intégrale sur l'axe, même multipliée par e^{ix}, ne convergera qu'en un sens restreint (parties principales de Cauchy ou autres limites restreintes).

Si elle présente un pôle compliqué, alors la convergence sera encore moins bonne, voire inexistante, et c'est pour cela que nous n'avons traité ici que d'un pôle simple.

Pour la méthode, si nous avions eu à calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ax}dx$ avec une constante complexe a, nous nous serions placés dans le demi-plan $|e^{az}| \le 1 \ldots$.

8.4 : intégrales du quatrième type.

Il s'agit d'intégrales de la forme

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{R(x)}{x^\alpha}dx, \tag{T4}$$

où $\alpha \in]0,1[$, et R est une fraction rationnelle sans pôle sur $[0,+\infty[$. Pour que l'intégrale converge, il faut et il suffit que $\lim_{+\infty} R(x) = 0$.

Pour étudier la convergence de cette intégrale, nous introduisons la fonction définie par $f(z) = \frac{R(z)}{z^\alpha}$, où $z \mapsto z^\alpha$ est définie sur $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty[:= \Omega$ par $z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha Arg(z)}$, $Arg(z)$ ayant été choisi dans $]0,2\pi[$.

Remarquons que l'on a pour $x > 0$, $\lim_{\substack{z\to x,\\ \mathcal{I}m(z)>0}} z^\alpha = x^\alpha$, alors que $\lim_{\substack{z\to x,\\ \mathcal{I}m(z)<0}} z^\alpha = e^{2i\pi\alpha}x^\alpha$.

Considérons le contour $\Gamma = \Gamma(\varepsilon, r)$, avec $0 < \varepsilon < r$, défini par l'union d'un aller-retour du segment $[\varepsilon, r]$, du cercle γ_r parcouru en sens direct, et du cercle γ_ε parcouru en sens indirect. Nous allons donner un sens à l'expression $\int_\Gamma \frac{R(z)}{z^\alpha}dz$ bien que $\Gamma^\star$ ne soit pas inclus dans Ω.

Pour cela considérons un secteur angulaire $-\theta \le Arg(z) \le \theta$, avec disons $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, et "ouvrons" Γ par le demi-axe $[0,+\infty[$ en "dédoublant" ce dernier et définissons Γ_θ comme étant l'union des deux segments $[\varepsilon e^{i\theta}, re^{i\theta}]$, $[re^{-i\theta}, \varepsilon e^{-i\theta}]$, puis de $\gamma_r \cap \{Arg(z) \in$

$[\theta, 2\pi - \theta]\}$ parcouru en sens direct, et de $\gamma_\varepsilon \cap \{Arg(z) \in [\theta, 2\pi - \theta]\}$ parcouru en sens indirect.

Alors $\Gamma_\theta^\star \subset \Omega$, et en choisissant $\varepsilon > 0$ et $\theta > 0$ assez petits, et $r > 0$ assez grand, nous obtenons que

$$\int_{\Gamma_\theta} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = 2i\pi \sum_{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}} Res(f, z)$$

Remarquons ensuite que, en paramétrant et en utilisant des critères standards de convergence des intégrales, nous avons

$$\lim_{\theta \to 0^+} \int_{\Gamma_\theta} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = \int_{\gamma_r} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz + \int_\varepsilon^r \frac{R(x)}{x^\alpha} dx - e^{2i\pi\alpha} \int_\varepsilon^r \frac{R(x)}{x^\alpha} dx.$$

Par application directe de **8.2.1**, on obtient, en observant que $z \mapsto \frac{R(z)}{z^\alpha}$ n'est pas continue en 0 mais que cela ne pose pas de problème dans la preuve de **8.2.1**, en notant $\gamma_{r,\theta}(t) = re^{it}$ et $\gamma_{\varepsilon,\theta} = \varepsilon e^{it}$, $\theta \leq t \leq 2\pi - \theta$, que $\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_{r,\theta}} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma_{\varepsilon,\theta}} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = 0$.

De la preuve de **8.2.1** il ressort que cette convergence vers 0 est uniforme en $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, et donc nous pouvons tout autant affirmer que

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = 0.$$

Nous pouvons donc conclure à

$$\left(1 - e^{2i\pi\alpha}\right) \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx = 2i\pi \sum_{z \neq 0} Res(f, z), \ f(z) = \frac{R(z)}{z^\alpha}.$$

8.5 : intégrales du cinquième type.

Il s'agit d'intégrales du type

$$I = \int_0^{+\infty} R(x) \ln x dx, \tag{T5}$$

où R est une fraction rationnelle sans pôle sur l'axe $[0, +\infty[$ et telle que $\lim_{+\infty} xR(x) = 0$, cette dernière condition assurant la convergence de l'intégrale en $+\infty$ par comparaison ln - puissance.

Ici nous allons appliquer une méthode très semblable à celle utilisée pour $(T4)$, et notamment nous introduisons la fonction $z \mapsto \ln z = \ln|z| + iArg(z)$, où $Arg(z) \in]0, 2\pi[$, et $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[= \Omega$.

Remarquons qu'ici aussi nous avons une “bizarrerie”, dans la mesure où si $x > 0$,

$$\lim_{\substack{z \to x, \\ \mathcal{I}m(z) > 0}} \ln(z) = \ln(x) \text{ et } \lim_{\substack{z \to x, \\ \mathcal{I}m(z) < 0}} \ln(z) = \ln(x) + 2i\pi.$$

Pour une raison qui apparaîtra plus claire sous peu, nous allons poser $g(z) = R(z)(\ln z)^2$, $z \in \Omega$. Nous appliquons stricto-sensu la même méthode, pour les mêmes contours, qu'en $(T4)$, et nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} R(x)\ln(x)^2dx - \int_0^{+\infty} R(x)(\ln x + 2i\pi)^2dx = 2i\pi \sum_{z\neq 0} Res(g,z),$$

et donc, si R est réelle, en séparant le réel de l'imaginaire, nous obtenons que

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} R(x)\ln x dx = -\frac{1}{2}\mathcal{R}e\left(\sum Res(g,z)\right); \\ \int_0^{+\infty} R(x)dx = -\frac{1}{2\pi}\mathcal{I}m\left(\sum Res(g,z)\right). \end{cases}$$

8.6 : exercices.

Ex. 8.6.1 : utiliser $(T1)$ pour calculer $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}$ avec $a > 1$ réel.

Ex. 8.6.2 : utiliser $(T2)$ pour calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$.

Ex. 8.6.3 : utiliser $(T3)$ pour calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

Ex. 8.6.4 : utiliser $(T4)$ pour calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$ avec $0 < \alpha < 1$.

Ex. 8.6.5 : utiliser $(T5)$ pour calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3}dx$.

Ex. 8.6.6 : soient $a > 0$ et ν réel. Montrer que l'on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\nu x)}{\mathrm{ch}x + \mathrm{ch}a}dx = \frac{\pi\sin(\nu a)}{\mathrm{sh}(\pi\nu)\mathrm{sh}a}$$

en utilisant la fonction $z \mapsto \frac{e^{\nu z}}{\mathrm{ch}z+\mathrm{ch}a}$, et le contour rectangulaire de sommets $\pm R$ et $\pm R + 2i\pi$.

Ex. 8.6.7 : calculer par la méthode des résidus :
- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n}$, $a, b > 0$;
- $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2ax)-\cos(2bx)}{x^2}dx$, $a, b \in \mathbb{R}$;
- $\int_0^{+\infty} \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\frac{\sin x}{x}dx$, $a > 0$;
- $\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{1-2a\cos t+a^2}dt$, $|a| \neq 1$, en intégrant $z \mapsto \frac{z^n}{(z-a)(z-\frac{1}{a})}$ sur le cercle unité.

9. Suites et séries de fonctions holomorphes ou méromorphes.

9.1 : suites de fonctions holomorphes.

Voici une définition qui correspond à une notion déjà utilisée en **4.6.2** :

DÉFINITION 9.1.1. “CONVERGENCE COMPACTE”. *Soit $(f_n : \Omega \to \mathbb{C})_{n\geq 1}$ une suite de fonctions. Nous dirons qu'elle converge uniformément sur les compacts (en abrégé* **CUC***) si il existe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que quel que soit $K \subset \Omega$ compact, $f_n \to f$ uniformément sur K.*

Voici quelques propriétés de base de la convergence compacte :

LEMME 9.1.2. *On a, avec les notations de* **9.1.1***, en supposant que la suite CUC, les propriétés suivantes :*

(a) : si les f_n sont continues, f aussi;

(b) : la suite est CUC si et seulement si elle l'est sur les disques compacts inclus dans Ω;

(c) : si $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est continue, et si les f_n sont continues, alors la suite $(g \circ f_n)$ est CUC, et converge vers $g \circ f$.

PREUVE. Pour (a), on a la convergence uniforme locale (sur les petits disques compacts de rayons positifs) qui entraîne la préservation de la continuité à la limite.

Pour (b), une implication est claire : et la réciproque s'obtient par la propriété de sous-recouvrement fini, et en observant que la convergence reste uniforme sur une union finie de sous-ensembles où elle a lieu.

Pour (c), soit $K \subset \Omega$ compact, soit $\delta > 0$, si $L = f(K)$, L est compact, et $L_\delta := \partial(L, \delta) = \{z : d(L, z) \leq \delta\}$ est compact car fermé borné. Puisque g est continue sur $\mathbb{C}$, elle est uniformément continue sur le compact L_δ : soit $\varepsilon > 0$: il existe $\delta > 0$ tel que $|u - u'| \leq \delta$ et $u, u' \in L_\delta \Rightarrow |g(u) - g(u')| \leq \varepsilon$.

Ensuite, la suite est CUC, et donc il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors quel que soit $z \in K$, $|f_n(z) - f(z)| \leq \delta$. Et alors on a $|g \circ f_n(z) - g \circ f(z)| \leq \varepsilon$. □

Pour renforcer **4.6.2**, nous avons

PROPOSITION 9.1.3. *Avec les notations de* **9.1.1***, si les f_n sont holomorphes, alors f l'est, et de plus pour chaque $k \geq 1$, la suite $(f_n^{(k)})$ CUC vers $f^{(k)}$.*

PREUVE. Par **4.6.2**, f est holomorphe. Pour ce qui est de la CUC de la suite des dérivées partielles, utilisons notre représentation intégrale **2.3.2** : d'abord soit $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$ un disque fermé inclus dans Ω. Ω étant ouvert, il existe un $0 < r < \rho$ tel que $\bar{D}(a, \rho) \subset \Omega$. Ensuite, si $z \in \bar{D}(a, r)$,

$$f_n^{(k)}(z) = k! \int_\gamma \frac{f_n(u)}{(u - z)^{k+1}} du, \quad f^{(k)}(z) = k! \int_\gamma \frac{f(u)}{(u - z)^{k+1}} du, \quad z \in \Omega \setminus \gamma^\star,$$

où $\gamma^\star \subset \Omega$ est par exemple le chemin $\gamma(t) = a + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

On en déduit aisément la convergence compacte sur les disques fermés inclus dans Ω, et par **9.1.2**, la conclusion recherchée en découle. □

Pour ce qui est de la gestion des pôles dans le cadre CUC commençons par les fausses singularités :

LEMME 9.1.4. *Supposons que* (f_n) *CUC vers* f *sur* $D'(a,r)$ *pour un certain* $r>0$. *Alors si chaque* f_n *présente en* a *une fausse singularité, il en est de même de* f.

PREUVE. Un prolongement analytique de chaque f_n est, sur $D(a,\frac{r}{2})$, par **2.3.2**,

$$z \mapsto \hat{f}_n(u) = \int_\gamma \frac{f_n(z)}{z-u}dz,$$

où $\gamma(t) = a + \frac{r}{2}e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$.

Par la propriété CUC, $\lim_n \int_\gamma \frac{f_n(z)}{z-u}dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-u}dz$ pour tout $u \in D(a,\frac{r}{2})$, puisque $\gamma^\star$ est compact inclus dans $D'(a,r)$.

D'autre part, si $z \in D'(a,\frac{r}{2})$, alors $\lim_n \hat{f}_n(z) = f(z)$, et donc f coïncide sur $D'(a,\frac{r}{2})$ avec $z \mapsto \int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}du$ qui est analytique sur $D(a,\frac{r}{2})$ (**2.3.2**). Ceci montre que f a un prolongement analytique en a, et donc y présente bien une fausse singularité. $\square$

PROPOSITION 9.1.5. *Supposons que* (f_n) *CUC vers* f *sur* $\Omega \setminus \{a\}$, *les* f_n *étant holomorphes et présentant en* a *un pôle d'ordre* $\leq k$, *avec* $a \in \Omega$.

Alors la limite est holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$ *et présente en* a *un pôle d'ordre* $\leq k$.

PREUVE. Par **6.4**, en posant $g_n(z) = (z-a)^k f_n(z)$ et $g(z) = (z-a)^k f(z)$, nous obtenons une suite de fonctions g_n qui CUC vers g, et qui présentent en a une fausse singularité. Par le Lemme **9.1.4**, la limite g présente en a une fausse singularité aussi.

Et donc f présente en a un pôle d'ordre $\leq k$. $\square$

9.2 : séries de fonctions méromorphes.

Ici nous considérons un ouvert Ω et pour chaque n une fonction u_n méromorphe sur Ω. Nous dirons que *la série* $\sum_n u_n(z)$ *CUC sur* Ω si quel que soit $K \subset \Omega$ compact, les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$(K1)$: il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors u_n n'a pas de pôle sur Ω;

$(K2)$: la série $\sum_{n\geq n_0} u_n(z)$ converge uniformément sur K.

Notons alors, pour une telle série, P_n l'ensemble des pôles de u_n, et $P = \cup_n P_n$. L'hypothèse CUC sur la série montre que P est localement fini. Pour $z \in \Omega \setminus P$, la série $\sum_n u_n(z)$ converge vers sa somme, au sens classique.

PROPOSITION 9.2.1. *Soit donnée une série de fonctions méromorphes* $\sum_n u_n(z)$ *qui CUC sur l'ouvert* Ω. *Alors*

(a) : sa somme est méromorphe sur Ω;

(b) : la série des dérivées $k^{\text{ièmes}}$ *CUC vers la dérivée* $k^{\text{ième}}$ *de la série.*

PREUVE. Observons que puisque P est localement fini, $\Omega \setminus P$ est ouvert. Sur cet ouvert, la série est limite CUC de la suite des sommes partielles, car pour tout $K \subset \Omega \setminus P$ compact, nous pouvons supposer $n_0 = 0$ dans la condition (K_1).

Par **9.1.3**, nous en déduisons que la somme est holomorphe sur cet ouvert, et que celle des dérivées $k^{\text{ièmes}}$ des u_n CUC vers la dérivée $k^{\text{ième}}$ de la somme.

Soit maintenant $z \in P$. Puisque $\{z\}$ est compact, z n'est un pôle que pour un nombre fini de u_n. Notons m_z le plus grand de ses ordres. Alors z est un pôle d'ordre $\leq m_z$ de $\sum_{n=0}^{k} u_n$, et par **9.1.5**, c'en est un d'ordre $\leq m_z$ de la somme de la série.

Donc la somme de la série est bien méromorphe, et l'ensemble de ses singularités est inclus dans P.

Montrons pour conclure que la série des dérivées $k^{\text{ièmes}}$ CUC vers la dérivée $k^{\text{ième}}$ de la somme, au sens de la définition du présent paragraphe.

La condition $(K1)$ est clairement vérifée, et la condition $(K2)$ découle directement de **9.1.3**, puisque le compact K étant donné, avec son entier n_0 dans $(K1)$, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ CUC sur l'ouvert $\Omega \setminus (\cup_{n \geq n_0} P_n)$, et en particulier converge uniformément sur K. $\square$

9.3 : applications : formule d'Euler et autres développements.

Supposons que $z \neq k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Alors on a la formule d'Euler

$$\text{cotan} z = \frac{1}{z} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - n^2\pi^2}. \tag{E}$$

Avant de démontrer la validité de la formule (E), remarquons simplement que par **9.2.1** la série de droite dans l'équation (E) est CUC sur $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Pour $z \in \Omega$, notons $F(z) = \text{cotan} z - \frac{1}{z}$. Proche de $z = 0$, on a le DL

$$z\cos z - \sin z = -\frac{z^3}{3} + o(z^3)$$

dont il découle que $\lim_0 \text{cotan} z - \frac{1}{z} = 0$ puisque $\frac{\sin z}{z} \to 1$ en 0. Donc on peut prolonger f en 0 en une fonction holomorphe en posant $F(0) = 0$.

Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, et notons

$$G(z) = \frac{F(z)}{z - u}.$$

Cette fonction est méromorphe dans le plan, et n'a que des pôles simples aux points $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{u\}$. Nous pouvons calculer facilement les rédsidus de G en ces points :

– $Res(G, u) = F(u)$;

– $Res(G, k\pi) = \lim_{z \to k\pi} \frac{z-k\pi}{z-u} F(z) = \frac{Res(F,k\pi)}{k\pi - u} = \frac{1}{k\pi - u}$.

Soit $n \geq 1$ un entier et $r_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, et soit C_n le carré parcouru dans le sens direct et de sommets $r_n(\pm 1 \pm i)$. Appliquons la formule des résidus à G pour ce contour C_n et un entier n tel que $|u| < r_n$. Observons qu'un calcul simple montre que les indices relativement à C_n sont 1 à l'"intérieur", et 0 à l'extérieur. Ainsi

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_n} \frac{F(z)}{z-u} dz = F(u) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k\pi - u} - \frac{1}{k\pi + u} \right), \ \frac{1}{2i\pi}\int_{C_n} \frac{F(z)}{z} dz = F(0) = 0 \ (u = 0),$$

et donc en prenant la différence de ces deux formules, on obtient

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_n}\frac{uF(z)}{z(z-u)}dz = F(u) - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{u}{u^2-k^2\pi^2}.$$

Nous allons maintenant montrer que l'intégrale de gauche ci-dessus tend vers 0 si n tend vers $+\infty$. Pour cela observons que si $z = x+iy$, alors

$$|\text{cotan}z|^2 = \frac{\cos^2 x + \text{sh}^2 y}{\sin^2 x + \text{ch}^2 y},$$

et donc si $y \neq 0$, on peut écrire

$$|\text{cotan}z|^2 \leq \frac{1+\text{sh}^2 y}{\text{sh}^2 y} \leq \frac{\text{ch}^2 y}{\text{sh}^2 y}, \quad \text{donc } |\text{cotan}(z)| \leq \coth|y|.$$

Ensuite, si $|x| = r_n$, on a

$$|\text{cotan}z|^2 \leq \frac{\text{sh}^2 y}{1+\text{sh}^2 y} < 1 < \coth^2\frac{\pi}{2},$$

et donc quoiqu'il arrive si $z \in C_n$, on a $|F(z)| \leq \frac{1}{r_n} + \coth\frac{\pi}{2} < 1 + \coth\frac{\pi}{2} =: K$. Alors

$$\left|\int_{C_n}\frac{uF(z)}{z(z-u)}dz\right| \leq \frac{8K|u|}{r_n - |u|} \qquad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \qquad 0.$$

Ceci achève de démontrer la formule d'Euler.

On peut utiliser la formule

$$\tan z = -\text{cotan}\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$$

et déduire de la formule d'Euler que

$$\tan z = -8\sum_{k\geq 1}\frac{z}{4z^2-(2k-1)^2\pi^2},$$

puis utiliser

$$\frac{1}{\sin z} = \text{cotan}z + \tan(z/2)$$

pour en déduire que

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + 2\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k z}{z^2-k^2\pi^2}.$$

Concluons par quelques mots sur **la fonction ζ de Riemann** :

$$\zeta(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^z}, \ \mathcal{R}e(z) > 1.$$

On applique **9.2.1** et on démontre que ζ est holomorphe dans $\mathcal{R}e(z) > 1$.

9.4 : reconstructions.
Voici deux théorèmes dits de “reconstruction”, dont nous ne démontrerons qu'une forme faible :

9.4.1. Théorème de Weierstraß. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $Z \subset \Omega$ un ensemble localement fini, et pour chaque $z \in Z$, soit $m(z)$ un entier positif. Alors il existe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que Z soit exactement l'enemble des zéros de f, et qu'en chaque $z \in Z$, le zéro soit d'ordre $m(z)$.*

9.4.2. Théorème de Mittag-Leffler. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $P \subset \Omega$ un sous-ensemble localement fini. Pour chaque $a \in P$, soit $q_a(z)$ un polynôme de terme constant nul. Alors il existe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ méromorphe dont P soit exactement l'ensemble des pôles, et telle qu'en chaque $a \in P$, la partie singulière de f soit $q_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$.*

Nous allons démontrer du second une forme simplifiée :

Proposition 9.4.3. *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite injective de nombres complexes telle que $\lim_n |a_n| = +\infty$, et soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une autre suite de nombres complexes.*
Alors il existe une fonction f méromorphe sur $\mathbb{C}$, telle qu'elle ait des pôles exactement aux a_n, et qu'en chacun d'eux, le pôle soit simple et de résidu b_n.

Preuve. On peut toujours trouver une suite $(q_n)_{n\geq 1}$ d'entiers positifs telle que pour chaque $0 \leq r < 1$,
$$\sum_{n\geq 1} |b_n| r^{q_n} < +\infty.$$
Par exemple, il suffit de choisir q_n entier tel que
$$\frac{\ln |b_n|}{q_n} \leq \ln(1 + \frac{1}{n}).$$

On peut ensuite supposer que les a_n soient tous non nuls (le résultat recherché peut être translaté). Considérons alors la série
$$T(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{b_n z^{p_n}}{a_n^{p_n}(z - a_n)}.$$
C'est une série de fonctions rationnelles. Le terme de rang n a un pôle simple $z = a_n$, de résidu
$$\frac{b_n a_n^{p_n}}{a_n^{p_n}} = b_n.$$
Soit $R > 0$. Il n'existe qu'un nombre fini d'indices n tels que $|a_n| \leq R$. Choisissons un nombre r tel que $0 < r < 1$. Il existe un entier N tel que $n \geq N \Rightarrow |a_n| \geq \frac{1}{r}$ et $\frac{R}{|a_n|} \leq r$ (donc $|a_n| > R$).
Alors si $|z| \leq R$ et $n \geq N$, on a
$$\left| \frac{b_n z^{p_n}}{a_n^{p_n}(z - a_n)} \right| \leq \frac{|b_n|}{1 - r} \frac{r^{p_n}}{|a_n|} \leq \frac{|b_n|}{1 - r} r^{q_n},$$

et donc la série $\sum_{n\geq N} \frac{b_n z^{p_n}}{a_n^{p_n}(z-a_n)}$ converge uniformément pour tout $|z| \leq R$.

Nous pouvons appliquer **9.2.1** pour conclure. $\square$

Corollaire 9.4.4. *Une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ est le quotient de deux fonctions entières.*

Preuve. Soit f méromorphe sur $\mathbb{C}$, et P l'ensemble de ses pôles. Par le théorème de Weierstraβ, il existe g holomorphe sur $\mathbb{C}$ présentant des zéros exactement aux points de P, avec pour multiplicité en chaque point de P celle qu'a ce point en tant que pôle de f.

Alors gf est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et n'a sur P que de fausses singularités. Elle est donc entière, comme g, et $f = \frac{gf}{g}$. $\square$

9.5 : produits infinis.

Un produit infini de nombres complexes est défini comme la limte des produits finis partiels, à l'instar d'une série qui n'est autre que la limite de la suite de ses sommes partielles.

Une seule différence existe cependant : on dira que le produit infini converge si la suite des produits partiels converge vers une limite **non nulle**.

Supposons donc donnée une suite $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}^\star$ telle que $\prod_n a_n$ soit convergeant. Alors nécessairement

– $\lim_n a_n = 1$;
– si $P_n := \prod_{k=1}^n a_k$, $\prod_{n\geq 1} a_n = P_n \prod_{k\geq n+1} a_k$.

Nous étendrons un petit peu le cas de la nullité en convenant que **le produit infini converge si la suite des produits partiels des termes de la suite pris à partir d'un certain rang converge vers une limite non nulle**, ce qui évite d'avoir à exclure la nullité de quelques premiers termes éventuels.

Lemme 9.5.1. Critère de convergence. *Soit* ln *la détermination principale du logarithme complexe, et soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{C}$ telle que* $\lim_n a_n = 1$.

Alors pour n assez grand, $\ln a_n$ existe. Et s'il existe n_0 tel que

$$S(n_0) := \sum_{n\geq n_0} \ln(a_n) \ \textit{converge},$$

alors $\prod_n a_n$ converge.

La réciproque est vraie.

Preuve. On a si $n \geq n_0$, $\prod_{k=n_0}^n a_k = \exp(\sum_{k=n_0}^n \ln(a_k))$, ce qui montre que $\prod_{k\geq n_0} a_k$ converge vers $\exp(S(n_0)) \neq 0$.

La réciproque est laissée à titre d'exercice. $\square$

Nous allons maintenant nous intéresser aux produits infinis de fonctions holomorphes. Considérons une suite de fonctions holomorphes non nulles sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, $(f_n)_{n\geq 1}$. Notons $f_n = 1 + u_n$, et $g_n = \prod_{k=1}^n f_k$. Alors les u_n et les g_n sont aussi des fonctions holomorphes sur Ω.

Si pour $z \in \Omega$, $(g_n(z))_{n\geq 1}$ converge simplement, nous noterons

$$f(z) = \prod_{n\geq 1} f_n(z).$$

LEMME 9.5.2. *On suppose que si $K \subset \Omega$ est compact, il existe un entier n_0 tel que*
(a) : $\ln(f_n)$ existe sur K pour tout $n \geq n_0$;
(b) : la série $\sum_{n\geq n_0} \ln(f_n)$ converge uniformément sur K.
Alors f est holomorphe sur Ω et la série de fonctions méromorphes $\sum_{n\geq 1} \left(f'_n \;/\; f_n\right)$ converge uniformément sur tout compact vers $f' \;/\; f$.

PREUVE. Soit D un disque ouvert d'adhérence $\bar{D} \subset \Omega$. Il existe n_0 tel que la série $\sum_{n\geq n_0} \ln(f_k)$ converge uniformément sur $\bar{D}$. Elle définit une fonction holomorphe sur D, et la suite $(\prod_{k=n_0}^{n} f_k)_{n\geq n_0}$ converge par **9.5.1**. Donc la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\bar{D}$, et donc est holomorphe sur D. Donc f est holomorphe sur Ω.

En notant $h(z) = \sum_{n\geq n_0} \ln(f_k(z))$, on a $f(z) = g_{n_0-1}(z)\exp(h(z))$, et donc

$$\frac{f'}{f} = \sum_{k<n_0} \frac{f'_k}{f_k} + h'.$$

Et sur tout compact de D, par CUC,

$$h' = \sum_{k\geq n_0} \frac{f'_k}{f_k}.$$

On obtient donc $\frac{f'}{f} = \sum_{k\geq 1} \frac{f'_k}{f_k}$ sur tout disque compact $\bar{D} \subset \Omega$, ce qui permet de conclure par **9.1.2.** *(b)*. $\square$

Nous obtenons donc le

THÉORÈME 9.5.3. PRODUIT INFINI D'HOLOMORPHES. *Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω, telles que $1 + u_n \neq 0$ sur Ω, et telle que le produit infini*

$$\prod_{n\geq 1} (1 + u_n)$$

converge normalement sur tout compact. Alors ce produit infini définit une fonction f holomorphe sur Ω, et de plus

$$\sum_{n\geq 1} \frac{u'_n}{1 + u_n} = \frac{f'}{f}.$$

Factorisation de $\sin z$.

Considérons le produit infini

$$f(z) = z \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

C'est par le théorème précédent une fonction entière dont les zéros sont les complexes de la forme $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Tous ses zéros sont simples, et sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k \geq 1} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}.$$

Par (E), on reconnaît à droite ci-dessus cotan$z$, et donc il existe λ constant tel que

$$f(z) = \lambda \sin z.$$

Pour déterminer λ, observons que pour $z \neq 0$,

$$\frac{f(z)}{z} = \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right),$$

donc $\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = 1$, et donc $\lambda = 1$.

9.6 : exercices.

9.6.1 : soient $p \leq q \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$ des entiers. On pose $f_n(z) = \frac{nz^p+1}{nz^q}$. Déterminer $\lim_n f_n$. Qu'observez-vous par passage à la limite en 0 ? (penser à l'ordre des pôles).

9.6.2 : montrer que si avec les hypothèses de **9.4.3** on a $\sum_n \frac{|b_n|}{|a_n|^2} < +\infty$, alors une solution très simple au problème de reconstruction correspondant est $z \mapsto \sum_n \frac{b_n}{a_n(z-a_n)}$.

9.6.3 : démontrer la réciproque dans le Lemme **9.5.1**.

9.6.4 : montrer que $\prod_{n \geq 1}(1 - \frac{1}{n^2})$ converge, et trouver sa limite.

A.1 : les fonctions que vous connaissez ou presque.

A.1.1. : les fonctions de base.

Fonctions circulaires: sinus (sin), cosinus (cos), tangente (tan).
Fonction exponentielle: e^x
Fonctions hyperboliques: cosinus hyperbolique ($\mathrm{ch}x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$), sinus hyperbolique ($\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$), tangente hyperbolique ($\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$).
Fonctions réciproques: logarithme népérien (ln) sur $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\mathbb{R}$, arcsinus (Arcsin) sur $[-1,1]$ vers $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, arccosinus (Arcos) sur $[-1,+1]$ vers $[0,\pi]$, arctangente (Arctan) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$, argsh (Argsh) sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, argch (Argch) de $[1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}^+$, argth (Argth) de $]-1,+1[$ vers $\mathbb{R}$.

Quelques développements en série (utiliser Taylor - Lagrange) :
$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$; rayon de convergence infini;
$\mathrm{ch}x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})$; idem;
$\mathrm{sh}x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x})$; idem;
$\cos x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$; idem;
$\sin x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$; idem.

Les séries ci-dessus ayant un rayon de convergence infini, et $\mathbb{C}$ étant complet, elles convergent si l'on remplace la variable réelle x par une variable complexe z. Par convergence absolue, puisque i^n vaut $i, -1, -i$ et 1 selon que n est congru à $1, 2, 3$ et 0 modulo 4, nous obtenons la formule de Moivre

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Par convergence absolue encore, nous avons toujours (cf. **1.5.3.**)

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Les rayons de convergence étant infinis, nous en déduisons que les fonctions précédentes, étendues à la variable complexe, sont des fonctions holomorphes. La dérivation formelle terme à terme dans la série donne

$$(e^z)' = e^z,\ \mathrm{sh}'(z) = \mathrm{ch}(z),\ \mathrm{ch}'(z) = \mathrm{sh}(z),\ \cos'(z) = -\sin(z),\ \sin'(z) = \cos(z).$$

En posant $z = x+iy$, nous avons $e^z = e^x e^{iy}$ et $|e^{iy}| = 1$, et $e^x > 0$. Donc l'exponentielle complexe ne s'annule jamais, et $|e^z| = e^{\mathcal{R}e(z)}$ et $\mathrm{Arg}(e^z) = \mathcal{I}m(z) \mod (2\pi)$.

On a les relations suivantes entre les circulaires et les hyperboliques :

$$\begin{array}{rclcrcl} \cos z &=& \mathrm{ch}(iz), & \quad & \mathrm{ch}z &=& \cos(iz), \\ \sin z &=& -i\mathrm{sh}(iz), & & \mathrm{sh}z &=& -i\sin(iz). \end{array}$$

On en déduit, si $z = x + iy$,

$$\left\{\begin{array}{ccl} \cos z & = & \cos x \mathrm{ch} y - i \sin x \mathrm{sh} y, \\ \sin z & = & \sin x \mathrm{ch} y + i \cos x \mathrm{sh} y, \\ \mathrm{ch} z & = & \mathrm{ch} x \cos y + i \mathrm{sh} x \sin y, \\ \mathrm{sh} z & = & \mathrm{sh} x \cos y + i \mathrm{ch} x \sin y, \\ |\cos z|^2 & = & \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y, \\ |\sin z|^2 & = & \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y, \\ |\cos z|^2 + |\sin z|^2 & = & 1 + 2\mathrm{sh}^2 y = \mathrm{ch}(2y), \\ \cos z = 0 & \Leftrightarrow & \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \mathrm{ch} z = 0 & \Leftrightarrow & z = i(\frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}, \\ \mathrm{sh} z = 0 & \Leftrightarrow & z = ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ceci permet d'introduire les fonctions tan et th proprement :

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \mathrm{th} z = \frac{\mathrm{sh} z}{\mathrm{ch} z}.$$

La première est définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, et la seconde l'est sur $\mathbb{C} \setminus \{i(\frac{\pi}{2} + k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$, et un calcul simple montre que

$$\begin{array}{ccl} \tan'(z) & = & 1 + \tan^2(z) = \frac{1}{\cos^2(z)}, \\ \mathrm{th}'(z) & = & 1 - \mathrm{th}^2(z) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 z}. \end{array}$$

A.1.2. : le logarithme complexe.

• *L'équation* $e^z = a$.

Ici, $a \in \mathbb{C}$ est la donnée, z l'inconnue. Pour $a = 0$, il n'y a pas de solution. Si $a \neq 0$, écrivons a sous forme trigonométrique : $a = re^{i\theta}$. Notons $z = x + iy$. Alors l'équation s'écrit

$$e^x = r \quad \text{et} \quad e^{iy} = e^{i\theta},$$

Les solutions sont donc

$$z = \ln r + i(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

•• *Inversion de l'exponentielle.*

Nous venons de voir que $e^z = a$ a toujours une solution pour $a \in \mathbb{C}^\star$, mais pas unique. Inverser l'exponentielle conduit donc à privilégier une de ces solutions plutôt qu'une autre. C'est ce que l'on appelle **choisir une détermination de l'argument**.

La **détermination principale de l'argument** est la valeur de l'argument de z, disons θ, qui soit telle que

$$-\pi < \theta \leq \pi.$$

Posons alors $\log : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}$ définie par

$$\log(\mathbf{z}) = \ln \mathbf{r} + \mathbf{i}\theta,$$

où $r = |z|$ et θ est la détermination principale de $\mathrm{Arg}(z)$. C'est le **logarithme complexe**.

La fonction log présente un ensemble de discontinuités sur $\mathbb{R}^-$, elle est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ (utiliser les équations de Cauchy en polaires), a pour dérivée

$$\log'(z) = \frac{1}{z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-,$$

et satisfait aux équations

$$\begin{cases} \log(e^z) = z \text{ si } -\pi < \mathcal{I}m(z) < \pi; \\ e^{\log z} = z \text{ si } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-. \end{cases}$$

Remarquons que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ n'est pas stable par produit. La relation

$$\log \mathbf{z_1 z_2} = \log \mathbf{z_1} + \log \mathbf{z_2} \mod (\mathbf{2i}\pi)$$

n'est pas aussi simple que son pendant dans le cas réel positif, et n'est vraie que si $z_1 z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

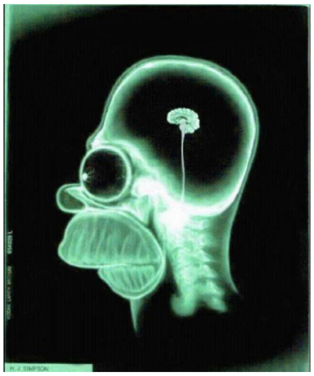
Il existe d'autres déterminations de l'argument, et donc d'autres logarithmes complexes, qui sont à priori des fonctions L satisfaisant à la relation $e^{L(z)} = z$.

A.1.3. : exercices.

Ex. 1 : montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$, $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$.
Ex. 2 : résoudre $\cos z = i$.
Ex. 3 : poser $F(z) = e^{\frac{1}{2}\log z}$, $z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Montrer que F est holomorphe sur Ω, et calculer F'. Définir $\sqrt{z}$ pour $z \in \Omega$. Définir $\sqrt[n]{z}$ pour $n \geq 3$.

Annales

UPJV, Licence de Mathématiques
Année universitaire 2002/2003
Partiel de LM7 (Analyse Complexe)
Jeudi 21 Novembre 2002, 9h–12h



Tous documents sauf livres autorisés, calculettes aussi.
E-mail, wap et communications téléphoniques interdits.

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Premier exercice.

Soient $a, b > 0$ et $\mathcal{E}_{a,b}$ l'ellipse dans le plan d'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

I-1 : trouver un chemin "simple" $t \mapsto \gamma(t)$ paramétrant l'ellipse avec l'intervalle $[0, 2\pi]$.
I-2 : calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ de deux façons différentes, et en déduire que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Deuxième exercice.

Soit f une fonction holomorphe sur le disque opuvert $D(a, R) = \{|z - a| < R\}$, avec $R > 0$ donné. Soit ρ un réel vérifiant $0 < \rho < R$. On pose

$$\phi(\theta) = \mathcal{R}e(f(a + \rho e^{i\theta})),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

II-1: montrer qu'il existe une unique suite $(c_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour $\theta \in \mathbb{R}$, $f(a + \rho e^{i\theta}) = \sum_{n\geq 0} c_n \rho^n e^{in\theta}$ (*Indication* : on pourra utiliser **2.3.2.** du cours).
II-2: montrer que

$$\mathcal{R}e(f(a)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(\theta)d\theta.$$

II-3: montrer que quel que soit $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$\int_0^{2\pi} \phi(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = \frac{\pi\rho^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

(*Indication* : partir de $\int_0^{2\pi} \phi(\theta)e^{-ik\theta}d\theta$, exprimer $\phi(\theta)$ comme somme d'une série à partir de la série qui exprime f en **II-1**, et conclure en intervertissant somme de la série et intégrale (justifier)).
II-4 : en déduire que

$$\mathcal{R}e(f^{(k)}(a)) = \frac{k!}{\pi\rho^k} \int_0^{2\pi} \phi(\theta)\cos(k\theta) d\theta.$$

Troisième exercice.

III-1: soit γ un chemin dans le plan complexe, et soit $\bar{\gamma}$ son image par la transformation $z \mapsto \bar{z}$. Montrer que $\bar{\gamma}$ est un chemin du plan, et que si $f : \gamma^\star \to \mathbb{C}$ est continue, alors $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ est continue sur $\bar{\gamma}^\star$, et que

$$\overline{\int_\gamma f(z)dz} = \int_{\bar{\gamma}} \bar{f}(\bar{z})dz.$$

III-2: si $\gamma(t) = e^{it} =: \gamma_1(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, montrer que

$$\overline{\int_{\gamma_1} f(z)dz} = -\int_{\gamma_1} \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}.$$

III-3: soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant le disque fermé $\{|z| \leq 1\} = \bar{D}(0,1)$. Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{\overline{f(z)}}{z-a} dz = \begin{cases} \overline{f(0)} \text{ si } |a| < 1; \\ \overline{f(0)} - \overline{f(1/\bar{a})} \text{ si } |a| > 1. \end{cases}$$

Quatrième exercice.

IV-1: décomposer $z \mapsto \frac{1}{z(1-z)}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}[X]$.
IV-2 : en déduire la valeur de $\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)}dz$ lorsque γ est le chemin
IV-2-1: $\gamma(t) = e^{it}/2$, $0 \leq t \leq 2\pi$;
IV-2-2: $\gamma(t) = 1 + e^{it}/2$, $O \leq t \leq 2\pi$;
IV-2-2: $\gamma(t) = 2e^{it}$, $O \leq t \leq 2\pi$.

Cinquième exercice.

Soit $f \in H(\mathbb{C})$ et soient $0 \leq r < R$. Notons

$$I = \int\int_{r<\sqrt{|x|^2+|y|^2}<R} f(x+iy)dxdy.$$

En passant en coordonnées polaires dans l'intégrale double, montrer que

$$I = \int_r^R \left\{ \frac{1}{i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z} dz \right\} \rho d\rho,$$

où $\gamma_\rho(t) = \rho e^{it}$, $O \leq t \leq 2\pi$. En déduire que

$$I = \pi f(0)(R^2 - r^2).$$

La Sénéçon Jacobée (Acadie)

UPJV, Licence de Mathématiques
Année universitaire 2002/2003
Examen de LM7 (Analyse Complexe)
Jeudi 23 Janvier 2003, 8h–12h

Seuls les cours polycopiés ou manuscrits sont autorisés.
E-mail, wap et communications téléphoniques interdits.

Les exercices sont indépendants les uns des autres.
Les réponses doivent être suffisamment argumentées.

Premier exercice : théorème des Résidus.

On note $J_0 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ et $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4} dx$.

I-1) : justifier l'existence des deux intégrales J_0 et J_1.

I-2) : soit γ le chemin fermé du plan défini par

$$\gamma(t) = \begin{cases} Re^{it} \text{ si } 0 \leq t \leq \pi; \\ -R(1-(t-\pi)) - \varepsilon(t-\pi) \text{ si } \pi \leq t \leq \pi+1; \\ \varepsilon e^{i(\pi-(t-\pi-1))} \text{ si } \pi+1 \leq t \leq 2\pi+1; \\ \varepsilon(1-(t-2\pi-1)) + R(t-2\pi-1) \text{ si } 2\pi+1 \leq t \leq 2\pi+2, \end{cases}$$

où $0 < \varepsilon < R$ sont des paramètres.

Dessiner le support de γ (γ^*), en indiquant à l'aide de petites flèches le sens de parcours des différentes portions de ce support.

I-3) : soit $f(z) = \frac{\ln z}{1+z^4}$, où $\ln z$ désigne la détermination du logarithme définie sur $U := \mathbb{C} \setminus \{z : \mathcal{R}e(z) = 0, \mathcal{I}m(z) \leq 0\}$.

En intégrant f sur γ, et en justifiant proprement, montrer que l'on a

$$2J_1 + i\pi J_0 = 2i\pi \left[\mathcal{R}es(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) + \mathcal{R}es(f, e^{i\frac{3\pi}{4}}) \right].$$

En déduire que $J_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ et $J_1 = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$.

Deuxième exercice : prolongement analytique.

Soit f une fonction analytique sur $D := D(0,2)$.
II-1): que dire de f si $\forall n \geq 1$, $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{n}$? (Considérer $f(z) - 2z$).
II-2): même question pour f satisfaisant à l'équation $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$, $n \geq 1$?

Troisième exercice : formule de Cauchy sur un disque.

Soit $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ une série entière convergente dans le disque $|z| < 1$. On suppose que si $|z| < 1$, alors

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|}.$$

Montrer qu'alors quel que soit $n \geq 1$, $|a_n| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) \leq e(n+1)$.

Quatrième exercice : un contre-exemple.

Donner un exemple d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ normalement convergente dans le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ mais telle que $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ ne converge pas uniformément sur le disque ouvert $D(0,1)$.

Cinquième exercice : résidus.

Démontrer le théorème de Liouville en appliquant le théorème des résidus à $\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$ où $a \neq b$ et $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Sixième exercice : résidus.

Utiliser, en la justifiant, la méthode des résidus pour évaluer les intégrales suivantes :
• : $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)}$, $a, b > 0$;
•• : $J = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{1-2a\cos t + a^2} dt$, $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$, en intégrant $z \mapsto \frac{z^n}{(z-a)(z-\frac{1}{a})}$ sur le cercle unité, $n \geq 1$.

UPJV, Licence de Mathématiques
Année universitaire 2002/2003
Examen de LM7 (Analyse Complexe)
Mardi 9 Septembre 2003, 8h30–12h30

Seuls les cours polycopiés ou manuscrits sont autorisés.
E-mail, wap et communications téléphoniques interdits.

Les exercices sont indépendants les uns des autres.
Les réponses doivent être suffisamment argumentées.

Premier exercice : théorème des Résidus.

On note $J_0 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ et $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4} dx$.

I-1) : justifier l'existence des deux intégrales J_0 et J_1.

I-2) : soit γ le chemin fermé du plan défini par

$$\gamma(t) = \begin{cases} Re^{it} \text{ si } 0 \leq t \leq \pi; \\ -R(1-(t-\pi)) - \varepsilon(t-\pi) \text{ si } \pi \leq t \leq \pi+1; \\ \varepsilon e^{i(\pi-(t-\pi-1))} \text{ si } \pi+1 \leq t \leq 2\pi+1; \\ \varepsilon(1-(t-2\pi-1)) + R(t-2\pi-1) \text{ si } 2\pi+1 \leq t \leq 2\pi+2, \end{cases}$$

où $0 < \varepsilon < R$ sont des paramètres.

Dessiner le support de γ (γ^*), en indiquant à l'aide de petites flèches le sens de parcours des différentes portions de ce support.

I-3) : soit $f(z) = \frac{\ln z}{1+z^4}$, où $\ln z$ désigne la détermination du logarithme définie sur $U := \mathbb{C} \setminus \{z : \mathcal{R}e(z) = 0, \ \mathcal{I}m(z) \leq 0\}$.

En intégrant f sur γ, et en justifiant proprement, montrer que l'on a

$$2J_1 + i\pi J_0 = 2i\pi \left[\mathcal{R}es(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) + \mathcal{R}es(f, e^{i\frac{3\pi}{4}}) \right].$$

En déduire que $J_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ et $J_1 = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$.

Deuxième exercice : séries.

Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes de parties réelles positives ou nulles, et telle que les deux séries $z_1 + \ldots + z_n + \ldots$ et $z_1^2 + \ldots + z_n^2 + \ldots$ convergent. Montrer qu'alors la série $|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 + \ldots$ converge.

Est-il alors nécessaire que la série $|z_1| + \ldots + |z_n| + \ldots$ converge ? Argumenter.

Troisième exercice : formule de Cauchy sur un disque.

Soit $D \subset \mathbb{C}$ un disque ouvert non vide du plan complexe, soient f, g holomorphes sur D, jamais nulles, et soient a, a_n des points de D tels que $a_n \to a$ et $a_n \neq a$.

Montrer que si pour chaque n,

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)},$$

alors il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que l'identité $f(z) = cg(z)$ soit valable sur D.

Quatrième exercice.

Calculer, en justifiant proprement les choses, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Cinquième exercice.

Soit α un nombre complexe de module distinct de 1. Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}$ en intégrant $(z-\alpha)^{-1}(z-\frac{1}{\alpha})^{-1}$ le long du cercle unité.

Sixième exercice.

Soit f une fonction à valeurs complexes indéfiniment dérivable dans un intervalle non vide $I =]x_0 - c, x_0 + c[\subset \mathbb{R}$. Montrer que pour qu'il existe dans $\mathbb{C}$ un disque $D = \{|z - x_0| < r\}$ avec $0 < r < c$ et une fonction analytique g sur ce disque telle que $f = g$ sur $I \cap D$, il faut et il suffit qu'il existe un nombre $0 < b < c$, un entier $k \geq 0$ et un nombre $A \geq 0$ tels que pour $x_0 - b \leq x \leq x_0 + b$, et tout entier $n \geq 0$, on ait

$$|f^{(n)}(x)| \leq A^n (n+k)!$$

(*Indication* : pour la nécessité, appliquer les inégalités de Cauchy. Pour la suffisance, majorer le reste de la formule de Taylor pour f au point x_0.)