

UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE
ANNÉE 2001/2002
DEUG SM PREMIÈRE ANNÉE
PREMIER SEMESTRE
UE2

COURS DE MATHÉMATIQUES

PROF. Y. LACROIX

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1 : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$	1
Chapitre 2 : éléments de logique et de théorie des relations	18
Chapitre 3 : limites et continuité	27
Chapitre 4 : fonctions continues sur un intervalle	36
Chapitre 5 : dérivées et fonctions usuelles	44
Chapitre 6 : suites	59
Chapitre 7 : groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels	62
Chapitre 8 : arithmétique des polynômes sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et décomposition des fractions rationnelles	64
Chapitre 9 : Intégrales et primitives	69
Annexe : sujets d'examen et devoirs	77

Chapitre 1 : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Dans ce premier chapitre on rappelle les propriétés essentielles de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, qui sont le fondement de l'analyse réelle ou complexe.

1.1. la droite réelle, $\mathbb{R}$.**1.1.1. Opérations sur les nombres réels.**

On peut y ajouter, soustraire, multiplier, et diviser, selon les règles suivantes (a, b et c désignent des nombres réels, i.e. $a, b, c \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \text{ (commutativité);} \\ 0 + a &= a \text{ (élément neutre);} \\ a + b = 0 &\Leftrightarrow a = -b \text{ (opposé);} \\ a + (b + c) &= (a + b) + c \text{ (associativité);} \\ ab &= ba \text{ (commutativité);} \\ 1 \times a &= a \text{ (élément neutre);} \\ ab = 0 &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0; \\ ab = 1 &\Leftrightarrow b = 1/a \text{ (inverse);} \\ a(bc) &= (ab)c \text{ (associativité);} \\ a(b + c) &= ab + ac \text{ (distributivité).} \end{aligned}$$

1.1.2. L'ordre sur $\mathbb{R}$.

Tout réel distinct de 0 est soit positif soit négatif. On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, et aussi $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$.

Si $a, b \in \mathbb{R}$, on dit que a est *inférieur ou égal* à b si $b - a$ est positif ou nul. On le note $a \leq b$. Si $a \leq b$ et $a \neq b$, on dit que a est *strictement inférieur* à b , noté $a < b$.

Ce qui est remarquable sur $\mathbb{R}$ muni de cet ordre, c'est qu'il est *total*, à savoir que deux nombres réels a et b satisferont toujours l'une seulement des trois relations suivantes :

$$a = b, \text{ ou } a < b, \text{ ou } a > b.$$

Ceci conduit aux définitions de $\min(a, b)$ et $\max(a, b)$:

$$\min(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b; \\ b & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \max(a, b) = \begin{cases} b & \text{si } a \leq b; \\ a & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.1.3. Opérations et ordre.

Rappelons les quelques propriétés remarquables suivantes :

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow a + c < b + c; \\ a < b \text{ et } a' \leq b' &\Rightarrow a + a' < b + b'; \\ a < b &\Leftrightarrow -b < -a; \\ a < b \text{ et } c > 0 &\Rightarrow ac < bc; \\ 0 \leq a, b \text{ et } a^2 \leq b^2 &\Rightarrow a \leq b. \end{aligned}$$

1.1.4. Archimédisme, min, max, minorant, majorant.

Rappelons que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, et que $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ désigne celui des entiers relatifs.

L'ensemble $\mathbb{R}$ possède une propriété fondamentale, dite d'Archimède :

si $A \geq 0$, il existe un entier naturel n tel que $n > A$. (Archimédisme)

Première conséquence : *si $a > 0$ et $A \geq 0$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\frac{A}{n} < a$.*

PREUVE. $A/a \geq 0$ donc est dépassé par un entier $n \geq 1$, d'après le principe d'Archimède. $\square$

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels possède lui aussi une propriété fondamentale. Avant de l'énoncer, nous devons définir la notion de minimum d'un sous-ensemble X de nombres réels.

On dira que $X \subset \mathbb{R}$ est *minoré* (resp. *majoré*) s'il existe un réel m (resp. M) tel que tout élément $x \in X$ vérifie $m \leq x$ (resp. $x \leq M$). On dira que X est *bornée* si elle est à la fois minorée et majorée.

Nous dirons que X a un *minimum* (resp. un *maximum*), noté $\min X$ (resp. $\max X$), s'il existe un réel $\min X \in \mathbb{R}$ (resp. $\max X \in \mathbb{R}$) tel que

$$\begin{aligned} \min X \in X \text{ et } x \in X &\Rightarrow x \geq \min X \\ (\text{resp. } \max X \in X \text{ et } x \in X &\Rightarrow x \leq \max X). \end{aligned}$$

Remarquons que si X possède un minimum (resp. un maximum), il n'en a qu'un ! Tous les sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ ne possèdent pas un minimum (resp. un maximum); par exemple $X =]0, 1]$ n'en a pas (par contre celui de $[0, 1]$ existe et vaut 0).

Par contre $\mathbb{N}$ échappe à cette carence :

tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ possède un minimum.

De même, il en découle immédiatement que :

tout sous-ensemble majoré de $\mathbb{Z}$ possède un maximum;
tout sous-ensemble minoré de $\mathbb{Z}$ possède un minimum;

PROPOSITION-DÉFINITION 1. *Si $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$ka \leq x < (k+1)a.$$

Lorsque l'on choisit $a = 1$, on note le seul entier $k \in \mathbb{Z}$ ainsi obtenu $[x]$ ou $E(x)$, et on l'appelle la partie entière de x .

PREUVE. Que x soit positif ou pas, $\frac{x}{a}$ est majoré par un nombre réel $y \geq 0$ ($y = 0$ si $x < 0$, $y = x/a$ sinon). Par Archimédisme, l'ensemble des entiers naturels n dépassant y n'est pas vide. Et donc l'ensemble des entiers relatifs dépassant x/a , qui contient ceux qui dépassent y (puisque $y \geq x/a$), n'est pas vide non plus. Notons $\mathbb{Z}_{x/a} = \{n \in \mathbb{Z} : x/a < n\}$ cet ensemble. Il possède un minimum, que nous noterons p , et qui est unique. Donc $p \in \mathbb{Z}_{x/a}$ et $p-1 \notin \mathbb{Z}_{x/a}$, i.e. $p-1 \leq x/a < p$. Choisir $k = p-1$. $\square$

1.1.5. Intervalles.

Les *intervalles* de $\mathbb{R}$ sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ de la forme suivante :

- (1) : $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ (fermé en a et b);
- (2) : $]a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ (ouvert en a , fermé en b);
- (3) : $[a, b[= \{x : a \leq x < b\}$ (fermé en a , ouvert en b);
- (4) : $]a, b[= \{x : a < x < b\}$ (ouvert (en a et b));
- (5) : $] - \infty, a] = \{x : x \leq a\}$ (commençant, fermé en a);
- (6) : $] - \infty, a[= \{x : x < a\}$ (commençant, ouvert en a);
- (7) : $[a, +\infty[= \{x : a \leq x\}$ (finissant, fermé en a);
- (8) : $]a, +\infty[= \{x : x > a\}$ (finissant, ouvert en a);
- (9) : $] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Un intervalle *ouvert* est un intervalle de la forme (4), (6), (8), ou (9) ci-dessus.

PROPOSITION 2. *Soit I un intervalle et $x < y \in I$. Alors $[x, y] \subset I$.*

PREUVE. Pour la preuve, il suffit d'examiner les 9 cas possibles, selon la numérotation ci-dessus. Nous ne le ferons que dans un seul des cas possibles, les autres se traitant de façon similaire. Supposons que $I = [a, b]$. Comme $x < y \in I$, par définition de I , il s'ensuit $a \leq x < y \leq b$.

On veut montrer que $z \in [x, y] \Rightarrow z \in I$, ce qui se traduit, compte tenu des définitions, par l'affirmation :

$$x \leq z \leq y \Rightarrow a \leq z \leq b.$$

Compte tenu de l'hypothèse $a \leq x < y \leq b$, l'implication ci-dessus est clairement satisfaite. $\square$

Liant l'archimédisme et les intervalles, nous avons le

LEMME 1. *Soient $a < b$ réels, et $0 < s < b - a$. Alors il existe un entier relatif n tel que $ns \in]a, b[$.*

PREUVE. Choisissons $n = [a/s] + 1$. Par définition de $[a/s]$, on a $n - 1 \leq a/s < n$. Multiplions par s , qui est positif : on obtient $(n - 1)s \leq a < ns$. Montrons à présent que $ns < b$. Pour cela, supposons le contraire; alors nous aurions

$$(n - 1)s \leq a < b \leq ns,$$

et donc, en faisant les différences des extrémités, nous obtiendrions $s \geq b - a$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il est donc impossible que $ns \geq b$, et donc finalement $a < ns < b$. $\square$

1.1.6. Décomposition des entiers naturels le long des nombres premiers.

Posons $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soient $d, n \in \mathbb{N}^*$. Nous dirons que d *divise* n s'il existe un entier m tel que $n = md$. On note $d|n$. Nous disons alors que m et d sont des *diviseurs* de n . Remarquons que 1 et n divisent n .

Un nombre premier est un entier positif $n > 1$ dont les seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

Notons $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers. L'ensemble $\mathcal{P}$ est infini, autrement dit *il existe une infinité de nombres premiers*. Nous numérotions les éléments de $\mathcal{P}$ en ordre croissant, en écrivant

$$\mathcal{P} = \{p_1 < p_2 < p_3 < \dots\} \quad (p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots).$$

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une suite finie d'entiers positifs ou nuls, alors, avec les nombres premiers, nous pouvons construire l'entier

$$n(\alpha) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}.$$

Nous dirons que cette “écriture”, ou décomposition, de l'entier $n(\alpha)$, est sa *décomposition canonique sous la forme d'un produit fini de puissances de nombres premiers*, ou plus simplement sa *décomposition canonique*. Par exemple

$$68 = 2^2 3^0 5^0 7^0 11^0 13^0 17^1, \text{ donc } 68 = n(2, 0, 0, 0, 0, 0, 1), \text{ avec } \alpha = (2, 0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

Un fait remarquable est le suivant (admis)

THÉORÈME 1. *Tout entier positif admet une décomposition canonique “unique”. Les guillemets précédents sont là pour simplement évoquer le fait que par exemple*

$$68 = n(2, 0, 0, 0, 0, 0, 1) = n(2, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \dots,$$

c'est à dire qu'on peut toujours rajouter des “0” à la fin, ce qui revient à multiplier l'entier par 1, et donc ne change rien.

A présent, nous pouvons écrire, si $n \geq 1$,

$$n = n(\alpha) = n(\alpha(n)) = p_1^{\alpha_1(n)} p_2^{\alpha_2(n)} \dots p_k^{\alpha_k(n)} \dots$$

Dans la pratique, déterminer la décomposition d'un entier en facteurs premiers se fait de façon *algorithmique* : par exemple décomposons $n = 136$:

- 136 est pair, et $136 = 2 \times 68$;
- 68 l'est encore, et $68 = 2 \times 34$;
- 34 l'est encore, et $34 = 2 \times 17$;
- 17 est premier.

Alors $136 = 2^3 \times 17 = n(3, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$! C'est simple. Observons enfin que

$$n = m \Leftrightarrow \alpha(n) = \alpha(m).$$

La décomposition canonique permet de déterminer très facilement les diviseurs d'un entier donné : cela repose sur la propriété suivante :

Divisions premières des produits : si p est premier et divise un produit d'entiers positifs mn , alors p doit diviser l'un au moins de m et de n .

En effet, quels sont les diviseurs de $n = n(\alpha)$? Supposons que $d = n(\beta)$ en soit un. Alors

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots \mid p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots,$$

et si $\beta_i > 0$, alors $p_i \mid d$ donc $p_i \mid n$. Mais

$$n = p_i^{\alpha_i} \times (p_1^{\alpha_1} \dots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots) = p_i^{\alpha_i} \times m,$$

et m n'est pas divisible par p_i . Donc par la propriété des divisions premières, il est nécessaire que si $\beta_i > 0$,

$$p_i^{\beta_i} \mid p_i^{\alpha_i},$$

ce qui n'est possible que si $\beta_i \leq \alpha_i$. Donc

PROPOSITION 3. Si $n = n(\alpha)$, l'ensemble des diviseurs de n est l'ensemble des $d = d(\beta)$ avec pour chaque i ,

$$\beta_i \leq \alpha_i.$$

Par exemple, l'ensemble des diviseurs de $n = n(1, 2, 1) = 2^1 3^2 5^1 = 90$ est constitué des nombres qui s'écrivent $2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3}$ avec $0 \leq \beta_1 \leq 1$, $0 \leq \beta_2 \leq 2$, et $0 \leq \beta_3 \leq 1$, à savoir, après énumération,

$$1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.$$

Pour conclure, énonçons le

LEMME 2. Si $\alpha(n) = (\alpha_i)_{i \geq 1}$ et $\alpha(m) = (\beta_i)_{i \geq 1}$, alors $\alpha(mn) = (\alpha_i + \beta_i)_{i \geq 1}$. Et donc si p est un entier positif,

$$\alpha(n^p) = (p\alpha_1, \dots, p\alpha_t, \dots).$$

PREUVE. On a $nm = (p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t} \dots)(p_1^{\beta_1} \dots p_t^{\beta_t} \dots)$, et donc en regroupant les termes, on en déduit que $nm = p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \dots p_t^{\alpha_t + \beta_t} \dots$, puisque $f^h f^g = f^{g+h}$.

Si $n = m$, on en déduit la seconde affirmation du Lemme 2 pour $p = 2$. Et pour $p \geq 2$, elle se déduit de façon similaire, pas à pas. $\square$

1.1.7. Rationnels, irrationnels.

Les *rationnels* sont les réels x qui s'écrivent comme un quotient de deux entiers. Leur ensemble est noté $\mathbb{Q}$. Les réels qui ne sont pas des rationnels sont dits *irrationnels*, et leur ensemble est noté $\mathbb{I}$. Par définition on a donc

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset, \text{ et } \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}, \text{ et aussi } \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Il existe des irrationnels : $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$.

PREUVE. Supposons le contraire, à savoir $\sqrt{2} = p/q$, avec p et q deux entiers positifs. Alors $q\sqrt{2} = p$, et donc $2q^2 = p^2$. Ensuite, par le Lemme 2, $\alpha(2q^2) = (1 + 2\alpha_1(q), 2\alpha_2(q), \dots)$ et $\alpha(p^2) = (2\alpha_1(p), 2\alpha_2(p), \dots)$, et donc si l'on suppose $2q^2 = p^2$, il s'ensuit, par le Théorème 1, que

$$1 + 2\alpha_1(q) = 2\alpha_1(p).$$

Mais cette dernière égalité est impossible, puisque son terme de gauche est un entier impair, alors que celui de droite est un entier pair. Il s'ensuit que l'égalité $\sqrt{2} = p/q$ ne peut avoir lieu. $\square$

Nous allons maintenant montrer qu'il y a des rationnels et des irrationnels "un peu partout" :

PROPOSITION 4. *Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Alors I contient une infinité de rationnels, et aussi une infinité d'irrationnels.*

PREUVE. Observons d'abord que si I est un intervalle ouvert non vide, alors I contient un intervalle ouvert de la forme $]a, b[$ avec $a < b$. Si nous démontrons le résultat pour un intervalle ouvert non vide de la forme $]a, b[$, il s'ensuivra, d'après notre observation, que le résultat restera vrai pour un intervalle ouvert non vide quelconque.

Supposons que nous ayons pu montrer que l'intervalle ouvert non vide $]a, b[$ contient un rationnel (resp. irrationnel) c . Alors puisque a et b étaient quelconques à ceci près qu'ils vérifiaient $b - a > 0$, il s'ensuivra, puisque $c - a > 0$ et que $b - c > 0$, que $]a, c[$ et $]c, b[$ contiendront chacun un rationnel (resp. irrationnel). Ce ne peut être c puisque $c \notin]a, c[$ et $c \notin]c, b[$. Donc nous avons trois rationnels (resp. irrationnels) déjà.

En poursuivant le processus pas à pas indéfiniment, on obtient l'infinité voulue. Ainsi tout se ramène à démontrer que tout intervalle ouvert $]a, b[$ avec $b - a > 0$ contient un rationnel, et aussi un irrationnel.

Par le principe d'Archimède, il existe un entier positif k tel que $k > 1/(b - a)$, et donc $0 < \frac{1}{k} < b - a$. Par le Lemme 1, il s'ensuit qu'il existe un entier relatif n tel que $a < n\frac{1}{k} < b$, i.e. $\frac{n}{k} \in]a, b[\cap \mathbb{Q}$. Voilà pour le rationnel !

Mais le même argument nous dit qu'il existe un rationnel $\frac{n'}{k'} \in]\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}[$, puisque $\frac{b-a}{\sqrt{2}} > 0$. Alors $\sqrt{2}\frac{n'}{k'} \in]a, b[$. Enfin si $\sqrt{2}\frac{n'}{k'} \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui n'est pas. Et voilà pour l'irrationnel ! $\square$

1.1.8. Valeur absolue.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La *valeur absolue* de x , notée $|x|$, est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0; \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

PROPOSITION 5. On a les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) : | -x | = |x| \geq 0, \quad -|x| \leq x \leq |x|, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0; \\ (2) : \sqrt{x^2} = |x|, \quad \text{et } |x| = \max(x, -x); \\ (3) : |xy| = |x||y|, \quad x \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|}; \\ (4) : |x + y| \leq |x| + |y| \quad (\text{inégalité triangulaire}); \\ (5) : ||x| - |y|| \leq |x - y|. \end{array} \right.$$

PREUVE. Les propriétés (1 – 3) se vérifient à la main directement à partir de la définition. Il suffit de discuter selon les différents cas possibles concernant les signes de x et de y .

Pour (4) on élève au carré et on utilise (2). Alors (4) revient à affirmer que $x^2 + y^2 + 2xy \leq x^2 + y^2 + 2|x||y|$, ce qui se réduit à affirmer que $xy \leq |xy|$, ce qui est vrai !

Pour (5), on applique (4) deux fois : $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ ce qui donne déjà $|x| - |y| \leq |x - y|$. On l'applique ensuite comme suit : $|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x|$ ce qui donne $|y| - |x| \leq |x - y|$. Les deux combinés redonnent (5), puisque $||x| - |y|| = \max(|x| - |y|, |y| - |x|)$. $\square$

PROPOSITION 6. Soit r un réel positif. Alors

$$|x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r, \quad \text{et } |a - x| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r.$$

PREUVE. D'après (2), $|a - x| = \max(a - x, x - a)$, donc

$$\begin{aligned} |a - x| < r &\Leftrightarrow \max(a - x, x - a) < r \Leftrightarrow a - x < r \text{ et } x - a < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r; \\ |a - x| \leq r &\Leftrightarrow \max(a - x, x - a) \leq r \Leftrightarrow a - x \leq r \text{ et } x - a \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r. \quad \square \end{aligned}$$

1.2. Les nombres complexes : $x^2 = -1$????.

1.2.1. Description, règles de calcul.

L'ensemble $\mathbb{C}$ des *nombres complexes* est l'ensemble dont les éléments s'écrivent $a + ib$, où a et b sont deux réels, et la lettre i désigne l'*imaginaire*. En tout cas pour l'instant il faut voir i comme un symbole supplémentaire, et en tout cas un objet mathématique qui n'est pas un réel !

Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, alors $a = \mathcal{R}e(z)$ est appelé sa *partie réelle*, et $b = \mathcal{I}m(z)$ sa *partie imaginaire*. Alors

$$z = \mathcal{R}e(z) + i\mathcal{I}m(z).$$

L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication, définies comme suit : si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} z + z' = (a + a') + i(b + b') \quad (\text{addition}); \\ zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \quad (\text{multiplication}). \end{array} \right.$$

On note $0_{\mathbb{C}} = 0 = 0 + i0$, que l'on appelle *le zéro* de $\mathbb{C}$. L'*unité* de $\mathbb{C}$, notée $1_{\mathbb{C}} = 1$, est définie par $1 = 1 + i0$. Ces notations sont cohérentes si l'on convient de l'identification suivante :

$$x \in \mathbb{R} \longleftrightarrow x + i0 \in \mathbb{C}.$$

Ainsi par la suite π désignera autant le réel π que le complexe $\pi + i0$. A travers cette identification, les opérations d'addition et de multiplication restent cohérentes : supposez que $b = b' = 0$ dans leurs définitions ci-dessus et vérifiez que c'est vrai !

PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE BASE.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}e(z + z') = \mathcal{R}e(z) + \mathcal{R}e(z'), \mathcal{I}m(z + z') = \mathcal{I}m(z) + \mathcal{I}m(z'); \\ z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}m(z) = 0; \\ z + z' = z' + z \text{ (commutativité)}; \\ z + (z' + z'') = (z + z') + z'' \text{ (associativité)}; \\ zz' = z'z \text{ (commutativité)}; \\ z(z'z'') = (zz')z'' \text{ (associativité)}; \\ z + 0 = z, 0z = 0, 1z = z; \\ \text{si } \lambda \in \mathbb{R}, \mathcal{R}e(\lambda z) = \lambda \mathcal{R}e(z) \text{ et } \mathcal{I}m(\lambda z) = \lambda \mathcal{I}m(z); \\ z = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = 0 \text{ et } \mathcal{I}m(z) = 0. \end{array} \right.$$

Comme dans le cas réel, nous avons l'opposé et l'inverse :

PROPOSITION 7. Si $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique complexe noté $-z$, et appelé l'opposé de z , tel que $z + (-z) = 0$. On note alors $z - z = 0$.

Si en outre $z \neq 0$, il existe un unique complexe noté $\frac{1}{z}$, appelé l'inverse de z , et tel que $z \frac{1}{z} = 1$.

PREUVE. Le complexe $z' = (-\mathcal{R}e(z)) + i(-\mathcal{I}m(z))$ satisfait bien $z + z' = 0$, d'où l'existence. Pour l'unicité, supposons que $z + z'' = 0$: alors en ajoutant z' , il vient $z' + (z + z'') = z'$, mais comme $z' + (z + z'') = (z' + z) + z'' = (z + z') + z'' = 0 + z'' = z''$, il s'ensuit que $z' = z''$.

Si $z \neq 0$, avec $z = a + ib$, alors $(a, b) \neq (0, 0)$, et donc $a^2 + b^2 > 0$. Un calcul élémentaire montre alors que

$$z' = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

satisfait $zz' = 1$, d'où l'existence. Si z'' est un autre complexe tel que $zz'' = 1$, alors $z'(zz'') = z'1 = z'$, mais $z'(zz'') = (z'z)z'' = (zz')z'' = 1z'' = z''$, et donc $z' = z''$. Ceci donne l'unicité. $\square$

Si $z \in \mathbb{C}$ et n est un entier positif, posons

$$z^n = \underbrace{z \dots z}_{n \text{ fois}}.$$

Si p est un autre entier positif, alors de l'associativité il découle que

$$(z^n)^p = z^{np}.$$

PROPOSITION 8.

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) : | -z | = |z| \geq 0, |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|; \\ (2) : |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0; \\ (3) : |zz'| = |z||z'|, z \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}; \\ (4) : |z + z'| \leq |z| + |z'| \text{ (inégalité triangulaire)}; \\ (5) : ||z| - |z'|| \leq |z - z'|. \end{array} \right.$$

PREUVE. Les propriétés (1 – 2) se vérifient à la main directement à partir de la définition. Pour (3), il suffit de calculer à partir de l'expression de $1/z$ donnée dans la preuve de la Proposition 7.

L'affirmation (5) se déduit des autres exactement comme dans le cas réel. Reste à montrer (4)... Pour cela notons $\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$. Alors un calcul appliqué montre que

$$(|z| + |z'|)^2 - |z + z'|^2 = 2(|zz'| - \operatorname{Re}(zz')),$$

et comme par (1), on a $\operatorname{Re}(zz') \leq |zz'|$, on en déduit (4). $\square$

1.2.3 Conjugué.

L'introduction de $\bar{z}$ dans la preuve de la Proposition 8 a simplifié la démonstration de façon “magique”. En fait $\bar{z}$ s'appelle *le conjugué de z* ,

$$\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z).$$

L'opération de conjugaison a quelques propriétés utiles :

PROPOSITION 9.

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) : \bar{\bar{z}} = z, \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \bar{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}; \\ (2) : \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}); \\ (3) : z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}, \text{ et } z \in \mathbb{R}i \Leftrightarrow iz \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z \\ \hspace{15em} (\text{on dit alors que } z \text{ est imaginaire pur}); \\ (4) : |z|^2 = z\bar{z}, |\bar{z}| = |z|, \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\ (5) : |z + z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z'\bar{z}) + |z'|^2. \end{array} \right.$$

PREUVE. Excellent exercice ! $\square$

Exemple : comment calculer $\frac{1}{2+3i}$? La technique consiste à comme l'on dit “*multiplier le dénominateur par son conjugué*”, i.e. procéder comme suit :

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2}{13} - i\frac{3}{13}.$$

Une application plus frappante est la suivante :

PROPOSITION 10. Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré en l'inconnue z et aux coefficients a, b, c réels, avec $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta \geq 0$, les racines de l'équation existent, sont réelles, égales à $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de racine réelle, mais par contre à les racines complexes données par

$$\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

On remarque qu'alors les deux racines sont complexes conjuguées.

PREUVE. Vérifier que ça marche ! $\square$

Exercice. Montrer que quel que soit $z \in \mathbb{C}$, il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $(z')^2 = z$. Déterminer tous les z' possibles.

1.2.4. Affixe et interprétation géométrique.

Soit $\mathbb{R}^2$ le plan euclidien muni de l'origine $O(0, 0)$. A un point $M(x, y)$ du plan, nous associons le complexe $z = x + iy$. C'est ce qu'on appelle l'*affixe* de M .

Figure 1

Dans la figure ci-dessus, on a noté $\rho = |x + iy|$ et θ désigne l'angle dans $[0, 2\pi[$ tel que

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta; \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

Si M a pour affixe z et N a pour affixe z' , alors

$$|z - z'| \text{ est la distance euclidienne de } M \text{ à } N.$$

Ainsi l'inégalité triangulaire n'est qu'une expression, pour la distance euclidienne, du fait que le chemin le plus court pour aller d'un point à un autre est la ligne droite !

1.2.5. Argument et forme trigonométrique.

Avec la Figure 1, si $z = x + iy$, alors $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$. Sur la Figure 1 on voit que pour définir θ il a suffi que $z \neq 0$.

DÉFINITION 2. Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, l'unique nombre réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ s'appelle l'*argument* de z , et se note $\text{Arg} z$. On a donc

$$z = |z|(\cos \text{Arg} z + i \sin \text{Arg} z).$$

Un nombre complexe non nul s'écrit donc toujours sous la forme $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$. C'est sa forme "trigonométrique".

Rappelons que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos \alpha = \cos \beta \text{ et } \sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

On dit alors que α est congru à β modulo 2π , et on note $\alpha \equiv \beta[2\pi]$.

PROPOSITION 11. Quels que soient z et z' distincts de 0, on a

$$\text{Arg}(zz') \equiv \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')[2\pi], \text{ et } \text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\text{Arg}(z) = \text{Arg}(\bar{z})[2\pi].$$

PREUVE. On a, quel que soit $z'' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si $z'' = |z''|(\cos \theta + i \sin \theta)$, alors $\theta \equiv \text{Arg}(z'')[2\pi]$. Rappelons les formules trigonométriques de base :

$$\begin{cases} \cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta', \\ \sin(\theta + \theta') = \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'. \end{cases}$$

Il suffit ensuite de calculer :

$$\begin{aligned} zz' &= |zz'|(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= |zz'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')). \\ \bar{z} &= |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)). \\ \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \left|\frac{1}{z}\right|(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)). \quad \square \end{aligned}$$

Remarque : on s'aperçoit ici que ce sont les formules de trigonométrie, ou si l'on préfère les règles géométriques naturelles d'addition des angles, qui sont à l'origine de la définition de la règle de multiplication des complexes.

Calculons z^n : d'après la Proposition 11, en l'appliquant pas à pas,

$$\mathbf{z}^n = |\mathbf{z}|^n(\cos(n\theta) + \mathbf{i} \sin(n\theta)).$$

PROPOSITION - DÉFINITION 3. Soit $i\theta$ un imaginaire pur. On appelle exponentielle de $i\theta$, le nombre, noté $e^{i\theta}$, et défini par

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Plus généralement, si $z = a + ib$ est un complexe quelconque, on définit l'exponentielle de z comme étant le nombre complexe noté e^z et tel que

$$e^z = e^x e^{iy}.$$

On a la **Formule de Moivre**:

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

PROPOSITION 12. *Voici quelques propriétés utiles de l'exponentielle complexe :*

$$\begin{cases} (1) : & e^z \text{ n'est jamais nul, } |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}, \operatorname{Arg}(e^z) \equiv \operatorname{Im}(z)[2\pi]; \\ (2) : & e^{z+z'} = e^z e^{z'}, 1/(e^z) = e^{-z}, \bar{e^z} = e^{\bar{z}}; \\ (3) : & (e^z)^n = e^{nz} \text{ si } n \text{ est entier relatif.} \end{cases}$$

PREUVE. Découle directement de la Proposition 11 et de la définition de l'exponentielle complexe. $\square$

Un exemple d'utilisation : imaginons que vos formules de “trigo” vous échappent. Par contre vous n'avez jamais oublié que $e^x e^y = e^{x+y}$. Et bien alors souvenez-vous simplement de la formule de Moivre, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Vous cherchez $\cos(a+b)$? Voici comment faire : on a $\cos(a+b) = \operatorname{Re}(e^{i(a+b)}) = \operatorname{Re}(e^{ia} e^{ib}) = \operatorname{Re}((\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)) = \cos a \cos b - \sin a \sin b !!!$

1.2.6. Linéarisation.

La linéarisation, c'est écrire $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$ comme une somme finie de produits de deux termes dont l'un est un réel et l'autre est de la forme $\cos(p\theta)$ ou $\sin(p\theta)$. Cela sert dans de nombreuses situations concrètes (notamment des problèmes issus de la physique élémentaire), où l'on se retrouve par exemple à devoir calculer $\int_0^{2\pi} \cos^5 \theta d\theta$ (nous verrons plus tard ce qu'est une intégrale).

A priori, rien ne nous indique que la linéarisation soit possible. C'est en fait la Formule de Moivre qui nous montre qu'elle l'est : en effet, on a $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$, lequel second membre se développe à l'aide de la formule du Binôme de Newton. On obtient alors des équations, que l'on peut résoudre... .

LEMME 3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, et notons $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Alors

$$2 \cos(n\theta) = z^n + \frac{1}{z^n} \text{ et } 2i \sin(n\theta) = z^n - \frac{1}{z^n}.$$

PREUVE. On a, puisque $|z| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$, que $\frac{1}{z} = \bar{z} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$. Et $\bar{z}^n = \bar{z}^n = \frac{1}{z^n}$. On déduit de la formule de Moivre que

$$\begin{aligned} z^n + \frac{1}{z^n} &= z^n + \bar{z}^n = 2\operatorname{Re}(z^n) = 2\cos(n\theta); \\ z^n - \frac{1}{z^n} &= z^n - \bar{z}^n = 2i\operatorname{Im}(z^n) = 2i\sin(n\theta). \quad \square \end{aligned}$$

Application à la linéarisation : on va utiliser le Lemme 3 et la formule du binôme. On a toujours

$$2 \cos \theta = z + \frac{1}{z}, \text{ et } 2i \sin \theta = z - \frac{1}{z}.$$

Si l'on veut linéariser $\cos^{2n} \theta$ ou $\sin^{2n} \theta$, on fait

$$\begin{aligned} 2^{2n} \cos^{2n} \theta &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \frac{z^{2n-k}}{z^k} \\ &= C_{2n}^n + \sum_{p=0}^{n-1} \left(z^{2(n-p)} + \frac{1}{z^{2(n-p)}}\right) C_{2n}^p \\ &= C_{2n}^n + \sum_{p=0}^{n-1} (2 \cos(2(n-p)\theta)) C_{2n}^p. \\ (2i)^{2n} \sin^{2n} \theta &= \left(z - \frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \frac{z^{2n-k}}{z^k} (-1)^k \\ &= (-1)^n C_{2n}^n + \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p (2 \cos(2(n-p)\theta)) C_{2n}^p. \end{aligned}$$

Pour les puissances impaires, un phénomène similaire se produit :

$$\begin{aligned} 2^{2n+1} \cos^{2n+1} \theta &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k \frac{z^{2n+1-k}}{z^k} \\ &= \sum_{p=0}^n \left(z^{2n+1-2p} + \frac{1}{z^{2n+1-2p}}\right) C_{2n+1}^p \\ &= \sum_{p=0}^n (2 \cos((2(n-p)+1)\theta)) C_{2n+1}^p. \\ (2i)^{2n+1} \sin^{2n+1} \theta &= \left(z - \frac{1}{z}\right)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k \frac{z^{2n+1-k}}{z^k} (-1)^k \\ &= \sum_{p=0}^n (-1)^p (2i \sin((2(n-p)+1)\theta)) C_{2n+1}^p. \end{aligned}$$

Un exemple : on veut linéariser $\sin(5\theta)$. On écrit $5 = 2 \times 2 + 1$, et on applique la formule ci-dessus qui correspond à l'expression d'une puissance impaire de $\sin$, à savoir, en l'occurrence, la dernière :

$$(2i)^5 \sin^5 \theta = 2i \sin(5\theta) - 5(2i \sin(3\theta) + 10(2i \sin \theta)).$$

On remarque ensuite que $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, \dots$, et donc $i^5 = i$. Ensuite $2^5 = 32$, et donc

$$\sin^5 \theta = \frac{1}{16} \sin(5\theta) - \frac{5}{16} \sin(3\theta) + \frac{5}{8} \sin \theta.$$

Il n'y a pas à apprendre ces formules par coeur, les seules à retenir étant $2i \sin \theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = z - \frac{1}{z}$, et $2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = z + \frac{1}{z}$.

1.2.7. Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe.

PROPOSITION - DÉFINITION 4. Soit $\tilde{z}$ un complexe non nul. Une racine $n^{\text{ième}}$ de $\tilde{z}$ est un complexe z' tel que $(z')^n = \tilde{z}$.

Tout nombre complexe non nul a exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$. Si $\tilde{z} \neq 0$, et $\tilde{z} = |\tilde{z}|e^{i \text{Arg} \tilde{z}}$, l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de $\tilde{z}$ est le suivant :

$$\left\{ \sqrt[n]{|\tilde{z}|} e^{i \frac{2k\pi + \text{Arg} \tilde{z}}{n}} : k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Il y en a exactement n .

PREUVE. Si $z_k = \sqrt[n]{|\tilde{z}|} e^{i \frac{2k\pi + \text{Arg} \tilde{z}}{n}}$, alors $z_k^n = |\tilde{z}| e^{i(2k\pi + \text{Arg} \tilde{z})} = |\tilde{z}| e^{i \text{Arg} \tilde{z}} e^{i2k\pi}$, et puisque $e^{i2k\pi} = 1$ pour k entier relatif, il s'ensuit que $z_k^n = \tilde{z}$. Donc l'ensemble annoncé est constitué de racines $n^{\text{ièmes}}$ de $\tilde{z}$.

Montrons que cet ensemble a n éléments exactement, ce qui revient ici à montrer que si $k_1, k_2 \in \{0, \dots, n-1\}$ et $k_1 \neq k_2$, alors $z_{k_1} \neq z_{k_2}$. Mais

$$z_{k_1} / z_{k_2} = e^{i2(k_1-k_2)/n},$$

et puisque $(k_1 - k_2)/n$ n'est pas entier, il s'ensuit que $z_{k_1} / z_{k_2} \neq 1$.

Ainsi l'ensemble annoncé énumère n racines $n^{\text{ièmes}}$ distinctes de $\tilde{z}$. Pourquoi n'y en aurait-il pas plus ? Cela résulte de la théorie des polynômes de la variable complexe.

Disons qu'un tel objet s'écrit $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$, où les a_t sont des complexes, et où, à moins que P ne soit le polynôme nul, $a_n \neq 0$. On appelle alors n le *degré du polynôme* P .

On dit qu'un polynôme Q *divise le polynôme* R si quel que soit z , $P(z) = Q(z)R(z)$, se qui s'écrit $P = QR$. On dit que z_o *est une racine du polynôme* P si $P(z_o) = 0$. Si tel est le cas, il résulte de la théorie de la *division euclidienne des polynômes* (nous verrons cela plus tard) que $P(z)$ est divisible par le polynôme $M_{z_o}(z) = z - z_o$. Il résulte aussi de cette théorie que si $z_o \neq z'_o$, alors les polynômes M_{z_o} et $M_{z'_o}$ sont *premiers entre eux*, à savoir notamment que s'ils divisent un même polynôme, leur produit divise le dit polynôme.

Alors considérons le polynôme $P(z) = z^n - \tilde{z}$. Les polynômes M_{z_k} le divisent, et il y en a n . Donc leur produit $M_{z_0}M_{z_1}\dots M_{z_{n-1}}$ divise P . Mais P est de degré n , ainsi que le produit. De plus le terme de degré n dans P a le coefficient 1, ce qui est aussi vrai du produit. Il en résulte déjà la formule remarquable suivante :

$$z^n - \tilde{z} = (z - z_0)(z - z_1)\dots(z - z_{n-1}), \quad \text{quel que soit } z \in \mathbb{C} !$$

Supposons que z_o soit distinct des z_k et que cependant $z_o^n = \tilde{z}$. Alors P serait divisible par $(z - z_0)\dots(z - z_{n-1})(z - z_o)$, qui est un polynôme de degré $n+1$. C'est impossible. $\square$

Appliquons le résultat précédent dans le cas $\tilde{z} = 1$: on obtient alors les *racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité*, qui sont, puisque $|1| = 1$ et $\text{Arg}1 = 0$,

$$1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, \dots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}.$$

Pour conclure, nous citons un théorème profond, que nous ne démontrerons pas :

Propriété fondamentale des polynômes sur $\mathbb{C}$. *Un polynôme non constant P à coefficients complexes possède toujours une racine dans $\mathbb{C}$.*

Remarquons que cela est faux sur $\mathbb{R}$: le polynôme $P(x) = x^2 + x + 1$ n'a pas de racines réelles, puisque son discriminant est strictement négatif.

1.2.8. Construction géométrique des racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe.

La Proposition - Définition 4 nous indique que pour déterminer les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe non nul z , il faut prendre la racine $n^{\text{ième}}$ du module, puis diviser l'argument par n , puis rajouter successivement les valeurs $\frac{2k\pi}{n}$ à l'argument.

Exemple : supposons que $z = 2 + 3i$, et cherchons ses racines cinquièmes. Il faut d'abord déterminer $|z|$ et $\text{Arg}z$. On a $|z| = \sqrt{13}$. D'autre part, $z = |z|e^{i\text{Arg}z} = |z|(\cos(\text{Arg}z) + i\sin(\text{Arg}z))$, et donc

$$\begin{cases} \cos(\text{Arg}z) = \frac{\text{Re}(z)}{|z|}; \\ \sin(\text{Arg}z) = \frac{\text{Im}(z)}{|z|}. \end{cases}$$

Ces deux formules sont essentielles dans la pratique. Comme $\cos^2 + \sin^2 \equiv 1$, on aura toujours $\cos \neq 0$ ou $\sin \neq 0$, et donc la possibilité d'écrire

$$\tan(\text{Arg}z) = \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} \quad \text{ou} \quad \cotan(\text{Arg}z) = \frac{\text{Re}(z)}{\text{Im}(z)},$$

et donc ensuite d'utiliser la fonction trigonométrique inverse pour déterminer l'argument.

Attention : l'unité appropriée dans l'utilisation avec les calculettes des fonctions trigonométriques inverses pour la détermination d'un argument est le **radian**. Pour vérifier que vous avez bien sélectionné l'unité "*radians*", calculez $\cos \pi$. Si vous obtenez -1 , ça va.

Ainsi $z = 2 + 3i$ donne $\tan(\text{Arg}z) = \frac{3}{2}$, et ma calculette m'indique que ça fait $\text{Arg}z = 0,98279372\dots$. Et donc

$$2 + 3i = \sqrt{13}e^{i0,98279372\dots}.$$

Les racines cubiques de $2 + 3i$ sont

$$\sqrt[3]{13}e^{i\frac{0,98279372\dots}{3}}, \sqrt[3]{13}e^{i(\frac{2\pi}{3} + \frac{0,98279372\dots}{3})}, \sqrt[3]{13}e^{i(\frac{4\pi}{3} + \frac{0,98279372\dots}{3})} !!!$$

1.3. Quelques exercices.

Exercice 1) : soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que si M est un majorant de A et si $M' \geq M$, alors M' est un majorant de A . Exprimer une propriété similaire du point de vue des minorants.

Exercice 2) : soit $A = \{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que A est borné. A-t-il un minimum ? Un maximum ?

Exercice 3) : soit $A = \{n^2 - n : n \in \mathbb{N}\}$. A est-il minoré ? Majoré ? Borné ?

Exercice 4) : calculer $[-\frac{\pi}{3}]$.

Exercice 5) : soient x, y, z trois réels.

a) Montrer que $x^2 + y^2 \geq 2xy$. En déduire que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.

b) Montrer que $(x+y)^2 \geq 4xy$. En déduire que si $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, alors $(x+y)(x+z)(y+z) \geq 8xyz$.

Exercice 6) : soient $a, x \in \mathbb{R}$. Supposons $a \neq 0$ et $|x - a| < a$. Montrer que $x \neq 0$ et que a et x ont le même signe.

Exercice 7) : soit $x \geq 0$ tel que $x \neq \sqrt{3}$. Posons $y = \frac{x+3}{x+1}$.

a) Montrer que $y \neq \sqrt{3}$.

b) Calculer $(y - \sqrt{3}) / (x - \sqrt{3})$. En déduire que $|y - \sqrt{3}| < |x - \sqrt{3}|$.

Exercice 8) : soient $x, y, s, t > 0$, et supposons que $\frac{x}{y} < \frac{s}{t}$. Montrer qu'alors $\frac{x}{y} < \frac{x+s}{y+t} < \frac{s}{t}$.

Exercice 9) : déterminer les nombres complexes z tels que $z^3 + 2i = 0$. Déterminer les racines carrées de $1 + i\sqrt{3}$ et de $\frac{1+i}{1-i}$.

Exercice 10) : calculer les racines quatrièmes de i . En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Exercice 11) : soit z complexe tel que $z^3 = \frac{i}{z}$. Montrer que $|z| = 1$. En déduire z .

Exercice 12) : soit z complexe non nul. Posons $a = z + \frac{1}{z}$.

- 1) Montrer que $z^2(a^2 + a - 1) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.
- 2) Montrer que $a^2 + a - 1 = 0$ si et seulement si $z \neq 1$ et $z^5 = 1$.
- 3) En déduire que $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5} - 1)/4$.
- 4) Calculer $\cos(\pi/5)$ et $\cos(\pi/10)$.

Exercice 13) : soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. Par un argument géométrique, montrer que

$$|z - a| = |z - b| \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{a + b}{2}.$$

Exercice 14) : soit $\mathcal{C}(M, r)$ le cercle dans le plan $\mathbb{R}^2$ de centre $M = (x, y)$ et de rayon $r > 0$. Montrer que l'ensemble des affixes des points de $\mathcal{C}(M, r)$ est l'ensemble

$$\{\tilde{z} \in \mathbb{C} : |\tilde{z} - (x + iy)| = r\}.$$

Exercice 15) : soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$|u + v|^2 - |u - v|^2 = 4\operatorname{Re}(u\bar{v}).$$

Chapitre 2 : éléments de logique et de théorie des relations.

Dans ce second chapitre nous donnons quelques éléments de logique. En matière de logique, on fait appel au “*bon sens*”. En conclusion nous démontrerons le principe de récurrence à partir de la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$.

Ensuite on présente les relations, relations d'ordre, d'équivalence, les fonctions, injections, surjections, bijections... .

2.1. Propositions et opérations logiques.

2.1.1. Propositions - Hypothèses.

Une *proposition* est une affirmation, qui peut être soit vraie soit fausse. Les valeurs d'une proposition sont V pour “vrai”, et F pour “faux”. En voici quelques exemples :

“Les extraterrestres sont verts”.

“Quand il n'y a pas de nuages, il ne pleut pas”.

“Un complexe imaginaire pur n'est pas réel”.

“Quand les poules auront des dents, les cochons seront des vaches”.

Certaines propositions sont “*indécidables*”, c'est à dire qu'on ne sait ni dire qu'elles sont vraies, ni qu'elles sont fausses. Par exemple on ne sait pas si les extraterrestres sont verts ou pas. Par contre on sait que quand il n'y a pas de nuages, il ne pleut pas.

Une *hypothèse* est une proposition supposée vraie. Une *démonstration* consiste la plupart du temps à faire des hypothèses et à en tirer des conclusions, vraies ou fausses.

2.1.2. Conjonction, réunion, et négation. Tables de vérité..

Supposons que P et Q soient deux propositions. On peut à partir d'elles en constituer de nouvelles, grâce à l'utilisation d'une *grammaire*, constituée des parenthèses (,), et des signes

$$\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow,$$

qui du point de vue du sens commun ont la traduction suivante :

$\wedge$ signifie *et*

$\vee$ signifie *ou*

$\neg$ signifie *non*

$\Rightarrow$ signifie *entraîne*

$\Leftrightarrow$ signifie *si et seulement si*

Nous allons voir qu'en fait $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ s'expriment à l'aide de $\neg$, $\vee$, et $\wedge$.

Règles grammaticales : à partir des propositions P et Q , on peut constituer les propositions suivantes :

$$\begin{cases} \neg P & : \text{signifie “non } P\text{”}; \\ P \wedge Q & : \text{signifie “} P \text{ et } Q\text{”}; \\ P \vee Q & : \text{signifie “} P \text{ ou } Q\text{”}. \end{cases}$$

Jusque là ce ne sont que des règles purement formelles, et il nous manque, pour leur donner du sens - du bon sens, de décrire la valeur de vérité de ces nouvelles propositions, en fonction des valeurs de vérité de P et de Q .

Dans les propositions nouvellement constituées, P et Q sont les constituants “élémentaires”, au sens où une fois les règles de fonctionnement définies, la connaissance des valeurs de vérité de P et Q doivent permettre de déterminer selon le cas celles de la nouvelle proposition.

Une table de vérité d'une proposition écrite à partir de propositions élémentaires $P, Q, R, \dots$, est un tableau par lignes donnant la valeur de vérité de la nouvelle proposition en fonction des combinaisons possibles de valeurs de vérité des constituants élémentaires $P, Q, R, \dots$.

C'est à l'aide de tables de vérité que nous définissons ci-après le sens des symboles $\neg$, $\vee$ et $\wedge$.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$
$\overline{V}$	$\overline{V}$	$\overline{V}$	$\overline{V}$	$\overline{F}$
$\overline{V}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{V}$	$\overline{F}$
$\overline{F}$	$\overline{V}$	$\overline{F}$	$\overline{V}$	$\overline{V}$
$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{V}$

Maintenant nous définissons le sens de $\Rightarrow$ et de $\Leftrightarrow$:

$P \Rightarrow Q$ est un raccourci pour écrire $(\neg P) \vee Q$;

$P \Leftrightarrow Q$ est un raccourci pour écrire $((P \wedge Q) \vee ((\neg P) \wedge (\neg Q)))$.

Ces définitions de $\Rightarrow$ et de $\Leftrightarrow$ ne sont pas fortuites : elles sont la traduction du bon sens. Pour nous en convaincre, dressons leurs tables de vérité :

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$	$P \wedge Q$	$\begin{matrix} (P \wedge Q) \\ \vee \\ ((\neg P) \wedge (\neg Q)) \end{matrix}$
$\overline{V}$	$\overline{V}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{V}$	$\overline{F}$	$\overline{V}$	$\overline{V}$
$\overline{V}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{V}$	$\overline{V}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$
$\overline{F}$	$\overline{V}$	$\overline{V}$	$\overline{F}$	$\overline{V}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{F}$
$\overline{F}$	$\overline{F}$	$\overline{V}$	$\overline{V}$	$\overline{V}$	$\overline{V}$	$\overline{F}$	$\overline{V}$

On voit que $P \Leftrightarrow Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont toutes deux vraies, ou toutes deux fausses. Et que $P \Rightarrow Q$ est vraie si et seulement dès que P l'est, Q l'est. Réfléchir... .

2.1.3. Démonstrations et Théorèmes.

Un *Théorème* est une *proposition vraie*. Une *démonstration* consiste à montrer qu'une *proposition est vraie ou fausse*, à partir d'hypothèses qui sont des *propositions supposées vraies*. Vous avez déjà démontré des résultats. Parfois on fait une démonstration *directe*, mais on peut aussi le faire *par l'absurde*, ou *par contraposition*. Est-ce licite ? Voici la réponse :

RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE. *Quelles que soient trois propositions P , Q , et R ,*

$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow \neg((P \wedge (\neg Q)) \Rightarrow (R \wedge (\neg R))).$$

Commentaire : l'expression de droite décrit le démarche de la preuve par l'absurde. En effet, on suppose P . On voudrait montrer Q . Alors on suppose P et non Q , et on montre l'absurde, à savoir quelquechose de faux, i.e. $R \wedge (\neg R)$.

PREUVE. Dresser une table de vérité avec trois variables P, Q, R (huit lignes), et observer la colonne qui apparaît sous la formule annoncée ci-dessus. Il n'y a que des "V". C'est donc que la formule est toujours vraie. On a donc raison de raisonner par l'absurde. $\square$

RAISONNEMENT PAR CONTRAPOSITION. *Quelles que soient deux propositions P , Q ,*

$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P)).$$

Commentaire : l'expression de droite décrit le démarche de la preuve par contraposition. En effet, on suppose P . On voudrait montrer Q . On ne peut avoir que Q ou $\neg Q$. Alors supposons que l'on ait $\neg Q$, et que l'on en ait conclu $\neg P$. Il s'en suit que si l'on a P , on ne peut faire autrement que d'avoir Q , car si l'on avait $\neg Q$, on aurait à la fois $\neg P$ et P .

PREUVE. Dresser une table de vérité avec deux variables P, Q (quatre lignes), et observer la colonne qui apparaît sous la formule annoncée ci-dessus. Il n'y a que des "V". C'est donc que la formule est toujours vraie. On a donc raison de raisonner par contraposition. $\square$

2.1.4. Quantificateurs.

Après avoir introduit des symboles mathématiques pour *non*, *ou*, *et*, *entraîne*, *équivalent*, nous allons en faire autant pour *quelque soit*, *il existe*, *il existe un unique*, et *tel que*.

$\forall$ signifie "quelque soit"
 $\exists$ signifie "il existe"
 $\exists!$ signifie "il existe un unique"
 $:$ signifie "tel que"

Vous avez déjà employé ces notations :

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! k \in \mathbb{Z} : k \leq x < k + 1$
 signifie

“quelque soit un réel x , il existe un unique entier relatif k ,
tel que k soit inférieur ou égal à x , et que $k + 1$ dépasse strictement x ”.

Exercice : montrer que la proposition suivante est vraie :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, (|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| \leq \varepsilon).$$

Qu'en est-il quand à la suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathbb{R}, (|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| \leq \varepsilon) \quad ???$$

Et de celle -ci :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, (|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| \leq \varepsilon) \quad ???$$

L'exemple précédent montre que **les quantificateurs ne sont pas interchangeables**. C'est là la source d'erreurs fréquentes.

2.1.5. Le principe de récurrence.

Nous nous sommes justifiés aux sections précédentes de l'emploi de la démonstration par l'absurde ou de la contraposition. Un autre mode de démonstration que vous avez déjà utilisé est la *preuve par récurrence*.

Il s'agit en général de devoir démontrer que pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, une certaine propriété, P_n , est vraie. Evidemment, l'ensemble des entiers étant infini, il faudrait plus d'une vie pour vérifier pas à pas que chaque P_n est effectivement vraie.

C'est là qu'intervient le principe de récurrence :

PRINCIPE DE RÉCURRENCE. *Supposons que soit donnée une suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de propositions. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n \iff (P_0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow P_{n+1}).$$

PREUVE. Si pour chaque $n \in \mathbb{N}$, P_n (“ P_n est vraie”), alors puisque le vrai entraîne le vrai, il est vrai que $(P_0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow P_{n+1})$, ce qui démontre l'implication de gauche à droite ci-dessus.

Réciproquement, supposons $(P_0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow P_{n+1})$. Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$\tilde{\mathbb{N}} = \{n \in \mathbb{N} : P_n \text{ est fausse}\}$$

est non vide. Alors par la propriété fondamentale des entiers naturels, $\tilde{\mathbb{N}}$ a un élément minimal n_0 .

Comme P_0 est vraie, $0 \notin \tilde{\mathbb{N}}$ et donc $n_0 > 0$. Donc $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$, et les entiers $0, \dots, n_0 - 1$ ne sont pas dans $\tilde{\mathbb{N}}$ puisqu'ils sont plus petits que $n_0 = \min \tilde{\mathbb{N}}$. Par hypothèse, puisque qu'on a P_0 , on a P_1 ; ayant P_1 , on a P_2 . De proche en proche, on en déduit que $P_0, \dots, P_{n_0-1}$ sont vraies. Mais si P_{n_0-1} est vraie, puisque par hypothèse $P_{n_0-1} \Rightarrow P_{n_0}$, il s'ensuit que P_{n_0} est vraie aussi, et donc, par définition de $\tilde{\mathbb{N}}$, que $n_0 \notin \tilde{\mathbb{N}}$. Ceci contredit le fait que $n_0 = \min \tilde{\mathbb{N}}$. $\square$

Exercice : montrer par récurrence sur n qu'en posant $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

2.2. Relations et fonctions.

2.2.1. Relations.

Soient A et B deux ensembles. On note $A \times B$ leur *produit cartésien*, défini par

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Une *relation de A vers B* est par définition un sous-ensemble $\mathcal{R}$ de $A \times B$. Une relation $\mathcal{R}$ sélectionne donc des couples (a, b) dans $A \times B$. Dans la plupart des cas, au lieu d'écrire $(a, b) \in \mathcal{R}$, on écrit $a\mathcal{R}b$, et on dit “ a est en relation avec b ”.

Le *domaine d'une relation $\mathcal{R}$* , noté $\text{dom}(\mathcal{R})$ ou $D(\mathcal{R})$, est défini par

$$\text{dom}(\mathcal{R}) = \{a \in A : \exists b \in B, a\mathcal{R}b\} = D(\mathcal{R}).$$

C'est l'ensemble des éléments de A qui sont en relation avec un élément de B .

L'*image d'une relation $\mathcal{R}$* , notée $\text{Im}(\mathcal{R})$, est définie par

$$\text{Im}(\mathcal{R}) = \{b \in B : \exists a \in A, a\mathcal{R}b\}.$$

Si $a\mathcal{R}b$, on dit que a est un *antécédent* de b , et que b est une *image* de a . Si $C \subset A$, on désigne par $\mathcal{R}(C)$ l'ensemble des éléments de B qui ont un antécédent dans C . On l'appelle l'*image de C par $\mathcal{R}$* . On a $\text{Im}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}(A)$.

Si $D \subset B$, on appelle *image réciproque de D par $\mathcal{R}$* l'ensemble des $a \in A$ en relation avec un élément de D . On la note $\mathcal{R}^{-1}(D)$.

Plus généralement, l'*inverse d'une relation $\mathcal{R}$* , notée $\mathcal{R}^{-1}$, est la relation de B à A définie par

$$b\mathcal{R}^{-1}a \iff a\mathcal{R}b.$$

Parmi les relations les plus utiles, il y a les relations d'*équivalence*, d'*ordre*, les *fonctions*, et les *applications*.

RELATIONS D'ÉQUIVALENCE. Une relation $\mathcal{R}$ de A vers B est une relation d'équivalence si $A = B$ et si

$$\begin{cases} (1) : & \forall a \in A, a\mathcal{R}a \text{ (réflexivité);} \\ (2) : & a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a \text{ (symétrie);} \\ (3) : & (a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \Rightarrow (a\mathcal{R}c) \text{ (transitivité).} \end{cases}$$

Une relation d'équivalence est donc **R**éflexive, **S**ymétrique, et **T**ransitive, ou **RST**.

Exemple : la congruence. Notons, si $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $\theta\mathcal{R}\theta'$ pour $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$ (encore noté $\theta \equiv \theta' [2\pi]$). Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Une relation d'équivalence est souvent notée $a \equiv b$.

RELATIONS D'ORDRE. Une relation $\mathcal{R}$ de A vers B est une relation d'ordre si $A = B$ et si

$$\begin{cases} (1) : \forall a \in A, a\mathcal{R}a \text{ (réflexivité);} \\ (2) : (a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a) \Rightarrow a = b \text{ (antisymétrie);} \\ (3) : (a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \Rightarrow (a\mathcal{R}c) \text{ (transitivité).} \end{cases}$$

Une relation d'ordre est donc **R**éflexive, **A**ntisymétrique, et **T**ransitive, ou **RAT**. Une relation d'ordre est souvent notée $a \leq b$.

Exemple : ordre lexicographique sur $\mathbb{C}$. Posons, pour $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$(z\mathcal{R}z') \iff \left((\operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(z')) \vee ((\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')) \wedge (\operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Im}(z'))) \right).$$

C'est un ordre sur $\mathbb{C}$...

2.2.1. Fonctions et applications.

Une fonction de A vers B est une relation $\mathcal{R}$ de A vers B telle que

$$((a\mathcal{R}b) \wedge (a\mathcal{R}b')) \Rightarrow (b = b'),$$

i.e. si a est en relation avec b , il n'est en relation qu'avec lui. On note alors $b = \mathcal{R}(a)$. Les relations qui sont des fonctions sont souvent notées f au lieu de $\mathcal{R}$.

Lorsque l'on écrit $f : A \rightarrow B$, on sous-entend automatiquement que f est une fonction de A vers B .

Exemple de fonction : $\log : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\operatorname{dom}(\log) =]0, +\infty[$, et si $x > 0$, $x \mapsto \log(x)$, le logarithme népérien.

Une fonction de A vers B est une *application* si son domaine est égal à A . On note toujours $f : A \rightarrow B$, mais on sous-entend, en désignant l'objet f du nom d'application, que tout $a \in A$ a une image.

Exemple d'application. $\log :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une application.

Restrictions. Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction, et $C \subset A$, $D \subset B$. Supposons que $f(C) \subset D$. Alors on définit la restriction de f à C et D comme étant la relation de C à D , notée $D|f|_C$, donnée par

$$D|f|_C(c) = f(c), \quad c \in C \cap \operatorname{dom}(f).$$

C'est une fonction de C à D .

La restriction d'une application en est une.

Plus généralement, la restriction d'une relation $\mathcal{R}$ de A à B , au sous-ensemble $C \times D$, est la relation $\mathcal{R} \cap (C \times D)$ de C à D .

COMPOSITION. Soient $\mathcal{R}$ une relation de A à B et $\mathcal{T}$ une relation de B à C . On appelle composée de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ la relation de A à C , notée $\mathcal{T} \circ \mathcal{R}$, et définie par

$$a\mathcal{T} \circ \mathcal{R}c \iff \exists b \in B : a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{T}c.$$

L'inverse de la composée $\mathcal{T} \circ \mathcal{R}$ est la composée des inverses, $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{T}^{-1}$.

Une composée de fonctions est une fonction, une composée d'applications est une application.

2.2.2. Injections, surjections, bijections.

Une fonction $f : A \rightarrow B$ est *injective* si

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a' \text{ (ou par contraposition } a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')).$$

Une fonction $f : A \rightarrow B$ est *surjective* si

$$f(A) = B \text{ (donc tout élément de } B \text{ a un antécédent dans } A).$$

Une fonction $f : A \rightarrow B$ est *bijjective* si elle est injective, surjective, et si $\text{dom}(f) = A$, i.e. si c'est une application et s'il est vrai que

$$\forall b \in B, \exists ! a \in A : b = f(a).$$

A L'ÉGARD DE LA COMPOSITION. Une composée d'injections est une injection. Une composée de surjections est une surjection. Une composée de bijections est une bijection. L'inverse d'une bijection est une bijection.

Exercice important : soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ des applications. Montrer que

- si $g \circ f$ est injective, alors f l'est;
- si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est.

2.2.3. Cardinaux.

Nous dirons que deux ensembles A et B ont *le même nombre d'éléments, ou même cardinal*, s'ils sont en bijection, i.e. s'il existe $f : A \rightarrow B$ bijective.

Nous dirons qu'un ensemble est *fini* s'il est en bijection avec un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$. Sinon nous dirons qu'il est *infini*.

En fait il y a les ensembles finis, puis $\mathbb{N}$, dit dénombrable, puis $\mathbb{R}$, et des ensembles bien plus gros encore... .

Nous dirons qu'un ensemble est *au plus dénombrable* s'il est en bijection avec un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

Exercice important : montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.

THÉORÈME DE CANTOR. *Quel que soit l'ensemble A , A et $\mathcal{P}(A)$, l'ensemble des parties de A , ne sont jamais en bijection. Par contre il existe une injection Inj de A dans $\mathcal{P}(A)$, définie par*

$$\text{Inj}(a) = \{a\}, a \in A.$$

PREUVE. Supposons que $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ soit bijective. Soit B le sous-ensemble de A défini par

$$B = \{a \in A : a \notin f(a)\}.$$

Soit $a \in A$ tel que $B = f(a)$, qui existe sous l'hypothèse f bijective. Alors $a \in B$ ou bien $a \notin B$ sont les deux seules éventualités possibles.

Supposons $a \in B$: alors par définition de B , $a \notin f(a)$, mais comme $f(a) = B$, il s'ensuit que $a \in B$ et $a \notin B$, ce qui est impossible.

Donc forcément $a \notin B$. Mais puisque $B = f(a)$, c'est que $a \notin f(a)$, ce qui par définition de B impose $a \in B$. Or $a \notin B$! C'est impossible aussi.

Donc quelle que soit l'éventualité, on aboutit à une contradiction. C'est donc que f bijective ne peut exister. $\square$

Nous citons pour information le résultat suivant :

THÉORÈME DE CANTOR - BERNSTEIN. *S'il existe une injection de A dans B , et une injection de B dans A , alors A et B sont en bijection.*

2.3. Opérations booléennes et fonctions.

2.3.1. Opérations Booléennes.

Soit X un ensemble. On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles de X . On définit trois opérations dites *Booléennes* sur $\mathcal{P}(X)$ de la façon suivante ($A, B \in \mathcal{P}(X)$) :

$$\begin{aligned} \textbf{Intersection} & : A \cap B = \{x \in X : (x \in A) \wedge (x \in B)\}; \\ \textbf{Réunion} & : A \cup B = \{x \in X : (x \in A) \vee (x \in B)\}; \\ \textbf{Complémentation} & : A^c = \{x \in X : x \notin A\}. \end{aligned}$$

On en déduit les opérations de *différence* et *différence symétrique* :

$$\begin{aligned} \textbf{Différence} & : A \setminus B = A \cap (B^c); \\ \textbf{Différence symétrique} & : A \Delta B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B). \end{aligned}$$

On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \textbf{ (commutativité)}; \\ A \cup B &= B \cup A \textbf{ (commutativité)}; \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \textbf{ (associativité)}; \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \textbf{ (associativité)}. \end{aligned}$$

2.3.2. Familles indexées - réunions - intersections - formules de “de Morgan”.

Soit $y : I \rightarrow Y$ une application d'un ensemble I vers un ensemble Y . On note parfois $y(i) = y_i$, et on réfère alors à l'application y par la notation $(y_i)_{i \in I}$. Dans ce contexte, on parle de $(y_i)_{i \in I}$ comme d'une *famille indexée*, et de I comme de *l'ensemble d'indexation*, ou d'*indices*.

On se place désormais dans le cas particulier où $Y = \mathcal{P}(X)$, et on se donne deux familles indexées $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ de parties de X .

Réunion d'une famille : la réunion de $(A_i)_{i \in I}$, notée $\cup_{i \in I} A_i$, est définie par

$$\cup_{i \in I} \mathbf{A}_i = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \exists i \in \mathbf{I} : \mathbf{x} \in \mathbf{A}_i\}.$$

Intersection d'une famille : l'intersection de $(A_i)_{i \in I}$, notée $\cap_{i \in I} A_i$, est définie par

$$\cap_{i \in I} \mathbf{A}_i = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \forall i \in \mathbf{I} : \mathbf{x} \in \mathbf{A}_i\}.$$

On observera que

$$\cap_{i \in I} A_i \subset A_i \subset \cup_{i \in I} A_i.$$

Formules de “de Morgan” : elles s'écrivent

$$(\cap_{i \in I} \mathbf{A}_i)^c = \cup_{i \in I} \mathbf{A}_i^c;$$

$$(\cup_{i \in I} \mathbf{A}_i)^c = \cap_{i \in I} \mathbf{A}_i^c.$$

On a aussi les quelques formules complémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} (\cup_{i \in I} A_i) \cup (\cup_{j \in J} B_j) &= \cup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cup B_j); \\ (\cap_{i \in I} A_i) \cap (\cap_{j \in J} B_j) &= \cap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j); \\ (\cup_{i \in I} A_i) \cap (\cup_{j \in J} B_j) &= \cup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j); \\ (\cup_{i \in I} A_i) \cap (\cap_{j \in J} B_j) &= \cup_{i \in I} (A_i \cap (\cap_{j \in J} B_j)). \end{aligned}$$

2.3.3. Fonctions et opérations Booléennes.

Soient X et Y deux ensembles, $f : X \rightarrow Y$ une fonction, $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée de parties de X , et $(B_j)_{j \in J}$ une famille indexée de parties de Y .

Images directes : on a

$$\begin{aligned} f(\cup_{i \in I} A_i) &= \cup_{i \in I} f(A_i); \\ f(\cap_{i \in I} A_i) &\subset \cap_{i \in I} f(A_i) \text{ (attention, l'égalité peut être fausse!);} \\ &\text{pas de lien à priori entre } f(A_i^c) \text{ et } f(A_i)^c. \end{aligned}$$

Images réciproques : là, tout marche bien :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\cup_{j \in J} B_j) &= \cup_{j \in J} f^{-1}(B_j); \\ f^{-1}(\cap_{j \in J} B_j) &= \cap_{j \in J} f^{-1}(B_j); \\ f^{-1}(B_j^c) &= f^{-1}(B_j)^c. \end{aligned}$$

Exercice 1 : soit E la fonction partie entière. Déterminer les ensembles suivants : $E^{-1}(\{0\})$, $E^{-1}(\{1\}^c)$, $E^{-1}(2\mathbb{N})$, $E([0, \frac{1}{2}])$, $E([\frac{1}{2}, 1])$, $E([\frac{1}{2}, 1]^c)$.

Exercice 2 : posons $A_m = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : 2^m \text{ ne divise pas } n\}$. Déterminer $\cap_{m \geq 0} A_m$ et $\cup_{m \geq 0} A_m$. Déterminer $A_2 \Delta A_3$.

Exercice 3 : Déterminer $\cos^{-1}([1, 2])$, $\cos^{-1}([\frac{\sqrt{2}}{2}, 1])$, et $\tan^{-1}([0, +\infty[)$.

Chapitre 3 : limites et continuité.**3.1. Limite d'une fonction.**

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que x_0 soit un point de I ou bien une extrémité de I .

DÉFINITION - LIMITE RÉELLE. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 , ou lorsque x tend vers x_0 (resp. à droite en x_0) (resp. à gauche en x_0), noté $\lim_{x_0} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{x_0^+} f(x) = \ell$) (resp. $\lim_{x_0^-} f(x) = \ell$) si

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / (x \neq x_0) \wedge (|x - x_0| < \delta) \wedge (x \in I) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ (\text{resp. } & \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / (x_0 < x < x_0 + \delta) \wedge (x \in I) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon) \\ (\text{resp. } & \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / (x_0 - \delta < x < x_0) \wedge (x \in I) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon). \end{aligned}$$

Par la suite nous écrirons " $\lim_{\mathbf{x}_0^{(\pm)}}$ " pour désigner indifféremment dans un même énoncé $\lim_{x_0}$, ou $\lim_{x_0^+}$, ou $\lim_{x_0^-}$.

Remarquons que de la définition il découle immédiatement que

$$\lim_{\mathbf{x}_0^{(\pm)}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ell \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x}_0^{(\pm)}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \ell) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x}_0^{(\pm)}} |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \ell| = \mathbf{0}.$$

Exercice : montrer que pour tout nombre $x_0 \geq 0$, $\lim_{x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

Exercice : soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = E \left(\frac{(1+x)^2}{1+x^2} \right).$$

Montrer que si $\lim_{x_0} f(x) = 1$ quel que soit $x_0 \geq 0$. Que vaut $f(x)$ si $x \neq 1$ et $f(1)$?

DÉFINITION - LIMITE $\pm\infty$ EN x_0 . On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 (resp. $-\infty$ en x_0) (resp. $+\infty$ à droite en x_0) (resp. $-\infty$ à droite en x_0) (resp. $+\infty$ à gauche en x_0) (resp. $-\infty$ à gauche en x_0), noté $\lim_{x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x_0} f(x) = -\infty$) (resp. $\lim_{x_0^+} f(x) = +\infty$) (resp. $\lim_{x_0^+} f(x) = -\infty$) (resp. $\lim_{x_0^-} f(x) = +\infty$) (resp. $\lim_{x_0^-} f(x) = -\infty$) si

$$\begin{aligned} & \forall A > 0, \exists \delta > 0 / (x \neq x_0) \wedge (|x - x_0| < \delta) \wedge (x \in I) \Rightarrow f(x) > A \\ (\text{resp. } & \forall A < 0, \exists \delta > 0 / (x \neq x_0) \wedge (|x - x_0| < \delta) \wedge (x \in I) \Rightarrow f(x) < A \\ (\text{resp. } & \forall A > 0, \exists \delta > 0 / (x_0 < x < x_0 + \delta) \wedge (x \in I) \Rightarrow f(x) > A) \\ (\text{resp. } & \forall A < 0, \exists \delta > 0 / (x_0 < x < x_0 + \delta) \wedge (x \in I) \Rightarrow f(x) < A) \\ (\text{resp. } & \forall A > 0, \exists \delta > 0 / (x_0 - \delta < x < x_0) \wedge (x \in I) \Rightarrow f(x) > A). \\ (\text{resp. } & \forall A < 0, \exists \delta > 0 / (x_0 - \delta < x < x_0) \wedge (x \in I) \Rightarrow f(x) < A). \end{aligned}$$

Exercice : soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Montrer que

$$\lim_{0^+} f(x) = +\infty.$$

DÉFINITION - LIMITES EN $\pm\infty$. Supposons que I soit finissant (de la forme $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$) (resp. commençant (i.e. de la forme $] - \infty, a[$ ou $] - \infty, a]$)).

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Nous dirons que f a pour limite ℓ en $+\infty$ (resp. ℓ en $-\infty$) (resp. $+\infty$ en $+\infty$) (resp. $-\infty$ en $+\infty$) (resp. $+\infty$ en $-\infty$) (resp. $-\infty$ en $-\infty$), noté $\lim_{+\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{-\infty} f(x) = \ell$) (resp. $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$) (resp. $\lim_{+\infty} f(x) = -\infty$) (resp. $\lim_{-\infty} f(x) = +\infty$) (resp. $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$) si

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 / (x \in I) \wedge (x > A) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ (\text{resp. } & \forall \varepsilon > 0, \exists A < 0 / (x \in I) \wedge (x < A) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon) \\ (\text{resp. } & \forall A > 0, \exists B > 0 / (x \in I) \wedge (x > B) \Rightarrow f(x) > A) \\ (\text{resp. } & \forall A < 0, \exists B > 0 / (x \in I) \wedge (x > B) \Rightarrow f(x) < A) \\ (\text{resp. } & \forall A > 0, \exists B < 0 / (x \in I) \wedge (x < B) \Rightarrow f(x) > A) \\ (\text{resp. } & \forall A < 0, \exists B < 0 / (x \in I) \wedge (x < B) \Rightarrow f(x) < A) \end{aligned}$$

Exercice : montrer que $\lim_{+\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2} = 1$. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{-\infty} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{-\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}.$$

Exercice : montrer que $\lim_{+\infty} \frac{x}{E(x)} = 1$. Montrer que $\lim_{+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Unifions un petit peu les notations, ce qui rendra plus digestes les énoncés à suivre. Nous désignons par $\lim_?$ la limite en x_0 , x_0^+ , x_0^- , $+\infty$, $-\infty$. Dans les énoncés où plusieurs limites seront mises en jeu, il sera toujours implicite que les différentes limites seront du même type.

DÉFINITION : LOCALEMENT EN ?. Nous utiliserons l'expression "localement en ?" qui signifiera :

- si $? = x_0$, "...il existe $\delta > 0$ tel que si $(x \in I) \wedge (|x - x_0| < \delta) \wedge (x \neq x_0)$, alors...";
- si $? = x_0^+$, "...il existe $\delta > 0$ tel que si $(x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[)$, alors...";
- si $? = x_0^-$, "...il existe $\delta > 0$ tel que si $(x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0])$, alors...";
- si $? = +\infty$, "...il existe $A > 0$ tel que si $(x \in I \cap]A, +\infty[)$, alors...";
- si $? = -\infty$, "...il existe $A < 0$ tel que si $(x \in I \cap]-\infty, A])$, alors...".

UNICITÉ DE LA LIMITE. Pour l'une quelconque des définitions de limite présentées ci-dessus, si f a une limite, sa limite est unique.

PREUVE. Tous les cas sont à envisager à priori, et pour simplifier nous ne traiterons que celui de la limite réelle en un point $x_0 \in I$. Supposons, contrairement à l'énoncé, que $\ell \neq \ell'$ et qu'à la fois l'on ait

$$\lim_{x_0} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x_0} f(x) = \ell'.$$

Notons $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{2}$, et pour cet ε , sous nos hypothèses, il existe $\delta_\ell > 0$ et $\delta_{\ell'} > 0$ tels que

$$(x \in I) \wedge (x \neq x_0) \wedge (|x - x_0| < \delta_\ell \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon;$$

et

$$(x \in I) \wedge (x \neq x_0) \wedge (|x - x_0| < \delta_{\ell'} \Rightarrow |f(x) - \ell'| < \varepsilon.$$

Notons $\delta = \min\{\delta_\ell, \delta_{\ell'}\}$. Alors $\delta > 0$, et si $x \in I$ et $x \neq x_0$ et $|x - x_0| < \delta$, alors nous avons à la fois $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et $|f(x) - \ell'| < \varepsilon$. Et donc par l'inégalité triangulaire (Chap. 1),

$$|\ell - \ell'| \leq |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'| < 2\varepsilon = |\ell - \ell'|,$$

ce qui est impossible. La proposition est ainsi démontrée, par l'absurde. ■

LIMITE RÉELLE ENTRAÎNE BORNÉ AU VOISINAGE DU POINT OU DE L'INFINI. *Supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Alors f est bornée localement en x_0 , c'est à dire qu'il existe $M > 0$ tel que localement en x_0 , $|f(x)| \leq M$.*

PREUVE. Prendre $\varepsilon = 1$, et appliquer la définition correspondante de limite. Si par exemple on a pour hypothèse que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, alors pour ce $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[\Rightarrow |f(x) - \ell| < 1$. Mais alors si x est tel, ou s'il vaut x_0 (et si d'aventure f est définie en x_0),

$$|f(x)| \leq \max\{|\ell| + |f(x) - \ell|, |f(x_0)|\} \leq \max\{|\ell| + 1, |f(x_0)|\} < +\infty,$$

et donc f est bornée sur un petit voisinage à droite de x_0 dans I (ce qui signifie sur $I \cap [x_0, x_0 + \delta[$ pour un certain $\delta > 0$).

Si par exemple $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, alors il existe $A < 0$ tel que si $x \in I \cap]-\infty, A[$,

$$|f(x)| \leq |\ell| + |f(x) - \ell| \leq |\ell| + 1,$$

et là encore, f est bornée si $x \in I$ est plus petit que A . Etc... ■

Exercice : montrer que $\frac{1}{x^2 - x + 1}$ est bornée au voisinage de $+\infty$.

Dans le même ordre d'idées, nous avons

LIMITES ET MINORATIONS OU MAJORATIONS LOCALES. *Supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Alors si $g < \ell < r$, localement en x_0 , on aura $g < f(x) < r$.*

PREUVE. Prendre $\varepsilon = \min\{r - \ell, \ell - g\} > 0$ et appliquer la définition correspondante de limite. ■

Exercice : trouver $A > 0$ tel que $x > A \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{x}{E(x)} < 2$.

Un conséquence immédiate est le

THÉORÈME D'ORDRE SUR LES LIMITES. *Supposons que $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ soient deux fonctions et que localement en ? nous ayons $f(x) \leq g(x)$.*

Alors si $\lim_{?} f(x) = \ell$, si $\lim_{?} g(x) = \ell'$, $\ell \leq \ell'$.

PREUVE. D'après la proposition qui précède, si $\ell' < \ell$, prendre $g = \ell'$, $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{2}$, et le $\delta > 0$ correspondant dans la définition de $\lim_{x_0} f(x) = \ell$.

Alors $(x \in I) \wedge (|x - x_0| < \min\{\delta_0, \delta\}) \wedge (x \neq x_0) \Rightarrow (\ell' < \ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x))$.

Et donc si δ' correspond au ε dans la définition de $\lim_{x_0} g(x) = \ell'$, si $\delta_1 = \min\{\delta_0, \delta, \delta'\} > 0$, pour $(x \in I) \wedge (|x - x_0| < \delta_1) \wedge (x \neq x_0)$, on aurait

$$\ell' - \varepsilon < \mathbf{g}(\mathbf{x}) < \ell' + \varepsilon < \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

et donc $g(x) < g(x)$, ce qui est absurde. ■

Dans le même registre, nous avons le

THÉORÈME D'ÉCRABOILLAGE (OU DES DEUX CAMIONS ET DE LA 2CV). *Supposons $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ et que localement en ? nous ayons $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Supposons que $\lim_{?} f(x) = \lim_{?} h(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors g est "écrabouillée" sur ℓ lorsque x tend vers ?, i.e.*

$$\lim_{?} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \ell.$$

On a aussi que si $\lim_{?} f(x) = +\infty$ et si localement en ?, $f(x) \leq g(x)$, alors $\lim_{?} g(x) = +\infty$ aussi.

PREUVE. Avec le ? et le ℓ il y a plusieurs cas à démontrer. Supposons que ? = x_0 et $\ell \in \mathbb{R}$. Et donc nos hypothèses sont les suivantes : il existe $\delta > 0$ tel que

$$\lim_{x_0} f(x) = \ell = \lim_{x_0} h(x) \text{ et } (x \in I) \wedge (|x - x_0| < \delta) \wedge (x \neq x_0) \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

D'autre part la conclusion recherchée est $\lim_{x_0} g(x) = \ell$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta_f > 0$ tel que

$$(x \in I) \wedge (|x - x_0| < \delta_f) \wedge (x \neq x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Aussi puisque $\lim_{x_0} h(x) = \ell$ il existe $\delta_h > 0$ tel que

$$(x \in I) \wedge (|x - x_0| < \delta_h) \wedge (x \neq x_0) \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon.$$

Posons alors $\delta_g = \min\{\delta, \delta_f, \delta_h\} > 0$. Alors

$$(x \in I) \wedge (|x - x_0| < \delta_g) \wedge (x \neq x_0) \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon.$$

■

Exercice : supposons que $\lim_{?} f(x) = \pm\infty$ et que localement en ?, g soit bornée. Montrer qu'alors $\lim_{?} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$. En déduire $\lim_{+\infty} \frac{\sin x}{x}$.

Terminons ce paragraphe par un lien entre $\lim_{x_0}$ et $\lim_{x_0^+}$ et $\lim_{x_0^-}$:

LIMITES BILATÈRES ET UNILATÈRES. Soit $x_0 \in I$, tel qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $]x_0 - \gamma, x_0 + \gamma[\subset I$ (ce qui assure que x_0 peut être approché aussi bien par la droite que par la gauche par des points de I). Alors si $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = \pm\infty$,

$$\lim_{\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ell \iff \lim_{\mathbf{x}_0^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}_0^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ell.$$

PREUVE. Puisque $[(x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[)] \Rightarrow [(x \in I) \wedge (|x - x_0| < \delta) \wedge (x \neq x_0)]$, il s'ensuit que $\lim_{x_0} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x_0^+} f(x) = \ell$. On procède de même pour déduire que $\lim_{x_0} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x_0^-} f(x) = \ell$.

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$ et soient $\delta_+ > 0$ et $\delta_- > 0$ tels que

$$\begin{aligned} x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta_+[&\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon, \\ x \in I \cap]x_0 - \delta_-, x_0[&\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors si $\delta = \min\{\delta_+, \delta_-\} > 0$, il vient que

$$(x \in I) \wedge (|x - x_0| < \delta) \wedge (x \neq x_0) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

et donc la réciproque. ■

Exercice : calculer $\lim_{1-} E(x)$ et $\lim_{1+} E(x)$, et en déduire que $\lim_1 E(x)$ n'existe pas.

Exercice : calculer $\lim_{0-} x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ et $\lim_{0+} x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$. Si nous posons $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, est-ce que $\lim_0 f(x)$ existe ?

3.2. Opérations algébriques et limites.

LIMITES DE COMBINAISONS LINÉAIRES, PRODUITS ET QUOTIENTS. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim_{\text{?}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{\text{?}} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et définissons les fonctions $\alpha f + \beta g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $fg : I \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Alors

$$\lim_{\text{?}} (\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \alpha \ell + \beta \ell' \text{ et } \lim_{\text{?}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \ell \ell',$$

autrement dit la limite d'une combinaisons linéaire est la combinaison linéaire correspondante des limites, et la limite d'un produit est le produit des limites, correspondantes.

Supposons enfin que $\ell' \neq 0$. Alors g ne s'annule pas, localement, en ?, et

$$\lim_{\text{?}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{g}(\mathbf{x})} = \frac{\ell}{\ell'},$$

i.e. la limite du quotient existe si celles du numérateur et du dénominateur existent, et si celle du dénominateur n'est pas nulle. Et alors la limite du quotient est le quotient des limites.

Si $\alpha > 0$, si $\ell = \pm\infty$, et si $\ell' \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f(x) + \beta g(x) \rightarrow ? \pm\infty = \ell$.

Si $\ell = \pm\infty$ et si $\ell' > 0$, $f(x)g(x) \rightarrow ? \ell = \pm\infty$.

Si $\ell' = \pm\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow ? 0$.

Si $\ell = 0$ et si $f(x) > 0$ localement en $?$, alors $\lim ? \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

PREUVE. Les preuves sont relativement ressemblantes d'un cas à l'autre, et nous ne la ferons que pour l'un d'entre eux. Supposons que $\lim_{+\infty} g(x) = 8$ et que $\lim_{+\infty} f(x) = 3$, et cherchons à montrer que $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{8}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Ecrivons

$$\Delta(x) := \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{3}{8} = \frac{8f(x) - 3g(x)}{8g(x)} = \frac{8(f(x) - 3) - 3(g(x) - 8)}{8g(x)}.$$

Puisque $g(x) \rightarrow_{+\infty} 8$, il existe $A > 0$ tel que $x \in I \cap]A, +\infty[\Rightarrow 2 < g(x)$. Observons alors que si $x > A$ et $x \in I$,

$$|\Delta(x)| \leq \frac{8|f(x) - 3|}{16} + \frac{3|g(x) - 8|}{16}.$$

Soit $A_f > 0$ tel que si $x > A_f$ et $x \in I$, alors $|f(x) - 3| < \varepsilon$. Soit aussi $A_g > 0$ tel que si $x > A_g$ et $x \in I$, alors $|g(x) - 8| < \varepsilon$.

Soit $C = \max\{A, A_g, A_f\} > 0$ et soit $x \in I$ tel que $x > C$. Alors par ce qui précède,

$$|\Delta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{16}\varepsilon < \varepsilon.$$

■

Exercice : montrer que $\lim_{+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > 0; \\ 0 & \text{si } n < 0. \end{cases}$

POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES. Soit $n \geq 0$ un entier, soient $a_0, \dots, a_n$ n nombres réels, et supposons que $a_n \neq 0$. Nous associons à cette suite finie de réels le **polynôme** P qui est la fonction $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Alors si $n \geq 1$, $\lim_{+\infty} P(x) = \text{sgn}(a_n) \times \infty$, où $\text{sgn}(a_n)$ désigne le signe de a_n , i.e. “+” si $a_n > 0$, et “-” sinon.

Si n est pair, alors $\lim_{-\infty} P(x) = \lim_{+\infty} P(x)$. Par contre si n est impair, $\lim_{-\infty} P(x) = -\lim_{+\infty} P(x)$.

Soit $Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ un autre polynôme, avec $m \geq 1$ et $b_m \neq 0$. Alors $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une **fraction rationnelle**, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{x : Q(x) = 0\}$. Alors puisque $Q(x)$ a une limite $\pm\infty$ en $\pm\infty$, $Q(x)$ ne s'annule pas localement en $\pm\infty$, et donc $F(x)$ est bien définie localement en $\pm\infty$.

Et alors

$$\lim_{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } m > n; \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m; \\ \text{sgn}(\frac{a_n}{b_m}) \times \infty & \text{si } n > m, \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } m > n; \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m; \\ \text{sgn}(\frac{(-1)^n a_n}{(-1)^m b_m}) \times \infty & \text{si } n > m. \end{cases}$$

PREUVE. Ecrivons localement en $\pm\infty$,

$$\begin{cases} P(x) = a_n x^n (\frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + 1); \\ Q(x) = b_m x^m (\frac{b_0}{b_m x^m} + \frac{b_1}{b_m x^{m-1}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + 1). \end{cases}$$

Alors il est clair que $\lim_{\pm\infty} \frac{P(x)}{a_n x^n} = 1$ et que $\lim_{\pm\infty} \frac{Q(x)}{b_m x^m} = 1$.

D'après nos théorèmes, il en résulte que

$$\lim_{\pm\infty} P(x) = \lim_{\pm\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \lim_{\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

La discussion et les conclusions s'en suivent. ■

Exercice : calculer $\lim_{\pm\infty} \frac{x^3 - x^2 - x - 10^{10}}{100^{100} 100^{100} x^2 + x}$.

3.3. Continuité.

DÉFINITION DE LA CONTINUITÉ (BILATÈRE, UNILATÈRE). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. Nous dirons que

- f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$;
- f est continue à droite en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$;
- f est continue à gauche en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Il résulte alors immédiatement des propriétés des limites que f est continue en x_0 si et seulement si elle l'est à la fois à droite et à gauche en x_0 .

La fonction f sera dite continue (à droite) (à gauche) sur I si elle l'est (à droite) (à gauche) en tout point de I .

Remarque : puisque $f(x_0) - f(x_0) = 0$, on aura

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

autrement dit pour la continuité, contrairement au cas des limites, il n'est plus nécessaire d'exclure l'éventualité " $x = x_0$ ".

Exercices :

- $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$?
- $f(x) = 2$ est continue sur $\mathbb{R}$?
- $f(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$?

La continuité consiste donc à d'une part avoir une limite, et d'autre part à ce que la valeur de la limite soit égale à la valeur de la fonction au point. Il en résulte donc, via les énoncés correspondants concernant les limites, que

CONTINUITÉ ET OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Supposons que f et g soient continues (à droite) (à gauche) en x_0 . Alors $\alpha f + \beta g$ et fg le sont.

Le même énoncé est valable en remplaçant la continuité en x_0 par la continuité sur I .

Pour le quotient, il faut supposer que $g(x_0) \neq 0$. Alors $\frac{f}{g}$ est définie localement en x_0 , et y est continue.

Exercice : montrer par récurrence sur n que si le polynôme $P(x)$ est tel que $P(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$, alors il est continu sur $\mathbb{R}$.

CONTINUITÉ ET COMPOSITION. Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications. Soit $x_0 \in I$ et supposons que f est continue en x_0 et que g l'est en $f(x_0)$. Alors $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0 .

Et donc la composée de deux fonctions continues est continue.

PREUVE. Nous voulons montrer que $\lim_{x_0} (g(f(x))) = g(f(x_0))$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que si $y \in J \cap]f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta[$, alors $|g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$, puisque g est continue en $f(x_0)$.

Puisque $\delta > 0$ et que f est continue en x_0 , il existe $\gamma > 0$ tel que $x \in I \cap]x_0 - \gamma, x_0 + \gamma[\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$.

Alors $x \in I \cap]x_0 - \gamma, x_0 + \gamma[\Rightarrow f(x) \in J \cap]f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta[\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$. ■

Exercice : montrer que $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ. . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ une extrémité de I . Supposons que $\lim_{x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Définissons alors $g : I \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{x_0\}; \\ \ell & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Alors g est continue en x_0 .

PREUVE. Si $x \in I$ et $x \neq x_0$, alors $g(x) = f(x) \rightarrow_{x_0} \ell = g(x_0)$. ■

Exercices :

- $\lim_{+\infty} \sqrt{x} - x = ?$;
- $\lim_{+\infty} 2 \log(x+1) - \log(x^2+1) = ?$;
- $\lim_{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+a} - \sqrt{x^2-a}}{2x} = ?$;
- $\lim_{+\infty} \tan \left(\frac{(\pi+x)(1-\pi x)}{(1-2x)^2} \right) = ?$;
- $\lim_{+\infty} \frac{E(2x)}{E(x)} = ?$;

- soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est continue en 0 mais pas en 1;

- posons $u(x) = x - E(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = u(x)(1 - u(x))$. Calculer $f(x)$ pour $x \in [0, 1]$. Montrer que f est continue sur $[0, 1]$. Montrer que u et f sont 1-périodiques (i.e. $u(x+1) = u(x)$ et $f(x+1) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$ et tracer son graphe.

Chapitre 4 : fonctions continues sur un intervalle.

4.1. Suites convergentes, adjacentes, et intervalles emboîtés.

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. Nous dirons qu'elle **converge vers le nombre réel** ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) / (n \geq n(\varepsilon)) \Rightarrow (|x_n - \ell| < \varepsilon).$$

On note alors $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$, $x_n \rightarrow \ell$, ou $\lim_n x_n = \ell$. Par exemple, l'archimédisme montre que la suite $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ converge vers 0.

Nous dirons que $\lim_n x_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) si

$$\begin{aligned} &\forall A > 0, \exists n(A) \geq 1 / n \geq n(A) \Rightarrow x_n > A \\ (\text{resp. } &\forall A < 0, \exists n(A) \geq 1 / n \geq n(A) \Rightarrow x_n < A) \end{aligned}$$

La définition de limite des suites est suffisamment ressemblante à celle de limite d'une fonction en un point, pour que les théorèmes correspondants restent valables : citons les sans preuve :

Unicité de la limite : si $\lim_n x_n = \ell$ et si $\lim_n x_n = \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

Théorèmes algébriques : si $x_n \rightarrow \ell$ et $y_n \rightarrow \ell'$, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

– **Limite d'une combinaison linéaire** : $\alpha x_n + \beta y_n \rightarrow \alpha \ell + \beta \ell'$.

– **Limite d'un produit** : $x_n y_n \rightarrow \ell \ell'$.

– **Limite d'un quotient** : si $y_n \neq 0$ et $\ell' \neq 0$, $x_n / y_n \rightarrow \ell / \ell'$.

Théorème d'ordre : si en outre pour chaque n , $x_n \leq y_n$, alors $\ell \leq \ell'$.

Ecrabouillage : si $(z_n)_{n \geq 1}$ est une troisième suite, telle que pour chaque n , $x_n \leq z_n \leq y_n$, et si $\ell = \ell'$, alors $z_n \rightarrow \ell$.

Exercice : utiliser la continuité des fonctions sin et cos sur $\mathbb{R}$ pour montrer que

$$\lim_n \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n})}{\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})} = 1.$$

Par écrabouillage, montrer que $\lim_n \frac{n^2 + n}{n^3 - n} = 0$.

SUITES CONVERGENTES ET FONCTIONS CONTINUES. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $x_\infty \in I$, et soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de points de I .

Alors si f est continue en x_∞ , et si $\exists \lim_n x_n = x_\infty$, la suite $(f(x_n))_{n \geq 1}$ converge vers $f(x_\infty)$.

PREUVE. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $n(\varepsilon) \geq 1$ tel que si $n \geq n(\varepsilon)$ alors $|f(x_n) - f(x_\infty)| < \varepsilon$.

Par continuité de f en x_∞ , il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $x \in I$ et $|x - x_\infty| < \delta(\varepsilon)$, alors $|f(x) - f(x_\infty)| < \varepsilon$.

Puisque $x_n \rightarrow x_\infty$, il existe $n(\delta(\varepsilon)) \geq 1$ tel que si $n \geq n(\delta(\varepsilon))$, alors $|x_n - x_\infty| < \delta(\varepsilon)$.

Mais d'autre part $x_n \in I$ quel que soit n , par hypothèse. Et donc

$$n \geq n(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow |f(x_n) - f(x_\infty)| < \varepsilon.$$

Il suffit donc de choisir $n(\varepsilon) = n(\delta(\varepsilon))$. ■

Que sont les nombres réels ?

Vous les manipulez depuis des années. Mais comment sont-ils construits ? Ce ne sont certainement pas les nombres qui viennent de votre machine à calculer, puisque ceux-là sont tous de la forme $p / 10^8$ avec $p \in \mathbb{Z}$, si votre machine permet huit chiffres après la virgule, en base 10.

De fait il existe plusieurs constructions “*mathématiques*” de $\mathbb{R}$. Toutes reposent sur la même base, à savoir la donnée des entiers. Ces constructions sont relativement élaborées, et nous n’en reproduiront pas dans ce cours. Toutefois vous pouvez, à juste titre, imaginer les nombres réels comme étant les limites des suites de rationnels, convergentes.

Nous aurons toutefois besoin de la propriété fondamentale suivante :

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES SUITES CROISSANTES MAJORÉES ET DES SUITES DÉCROISSANTES MINORÉES. *Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels. Nous dirons qu’elle est **croissante** si $x_n \leq x_{n+1}$ pour $n \geq 1$. Nous dirons qu’elle est **décroissante** si $x_n \geq x_{n+1}$ pour $n \geq 1$.*

*Nous dirons que la suite est **majorée** (resp. **minorée**) s’il existe un réel M (resp. m) tel que pour chaque $n \geq 1$, $x_n \leq M$ (resp. $x_n \geq m$).*

Une suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) converge.

PREUVE. Admis. ■

INTERVALLES EMBOÎTÉS, SUITES ADJACENTES. *Supposons données deux suites réelles $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ telles que la première croisse, la seconde décroisse, et pour chaque $n \geq 1$, $a_n \leq b_n$. Remarquons que $a_n \leq b_p$, pour chaque n et p , et que donc par le résultat précédent, $\exists \lim_n a_n \leq b_p$ et $\exists \lim_p b_p \geq a_n$, et que donc par théorème d’ordre, $\lim_n a_n \leq \lim_n b_n$. Notons $I_n = [a_n, b_n]$. Alors si $I = \cap_n I_n$,*

$$I = [\lim_n a_n, \lim_n b_n].$$

*Si de plus $b_n - a_n \rightarrow 0$ (nous dirons alors que les suites (a_n) et (b_n) sont **adjacentes**), alors*

$$I = \{\lim_n a_n\} = \{\lim_n b_n\}.$$

PREUVE. Pour chaque n et p , si $p \leq n$ par exemple,

$$a_p \leq a_n \leq b_n \leq b_p,$$

et donc $a_n \leq b_p$. La suite (a_n) est donc croissante majorée par b_p , et par la propriété fondamentale et le théorème d’ordre, $\exists \ell = \lim_n a_n \leq b_p$. Ensuite la suite (b_p) est décroissante minorée par ℓ , et donc pour les mêmes raisons, $\exists \ell' = \lim_p b_p \geq \ell$.

Montrons à présent que $I = [\ell, \ell']$. Soit $x \in I$. Alors pour chaque n , $a_n \leq x \leq b_n$, et donc par théorème d’ordre, $\ell \leq x \leq \ell'$. Ainsi $I \subset [\ell, \ell']$.

Réciproquement, si $\ell \leq x \leq \ell'$, alors puisque pour chaque n , on a $a_n \leq \ell \leq \ell' \leq b_n$, il s'en suit que pour chaque n , $a_n \leq x \leq b_n$, et donc $x \in \cap_n [a_n, b_n] = I$. Donc $[\ell, \ell'] \subset I$, et par double inclusion, $I = [\ell, \ell']$.

Supposons à présent qu'en outre $b_n - a_n \rightarrow 0$. Alors puisque $b_n = (b_n - a_n) + a_n$, par unicité de la limite, et limite d'une combinaison linéaire, nous en déduisons que $\ell' = 0 + \ell = \ell$. Et donc $\ell = \ell'$, et $I = [\ell, \ell] = [\ell, \ell]$. ■

Exercice : trouver $\cap_n [1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n^2+n-1}]$.

4.2. Suites bornées, extraites, et Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Une suite **bornée** est une suite à la fois minorée et majorée.

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite. Soit $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ ($\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$) une application strictement croissante. Notons $f(k) = n_k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Alors la suite $(x_{f(k)})_{k \geq 1} = (x_{n_k})_{k \geq 1}$ est une **suite extraite de la suite** $(x_n)_{n \geq 1}$.

THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS. *Une suite bornée a une extraite qui converge.*

PREUVE. La preuve va consister à appliquer le théorème des segments emboîtés.

Supposons que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ soit minorée par a et majorée par b .

Étape "0" : notons $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}$, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}$, et $\mathbf{I}_0 = [\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0]$. Notons $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}^*$. Alors pour chaque $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0 \leq x_n \leq b_0$. Notons

$$\mathbf{m}_0 = \frac{\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0}{2}, \quad \mathbf{I}_0^g = [\mathbf{a}_0, \mathbf{m}_0[, \quad \mathbf{I}_0^d = [\mathbf{m}_0, \mathbf{b}_0],$$

et pour finir

$$\mathbb{N}_0^g = \{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0 : \mathbf{x}_{\mathbf{n}} \in \mathbf{I}_0^g\}, \quad \mathbb{N}_0^d = \{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0 : \mathbf{x}_{\mathbf{n}} \in \mathbf{I}_0^d\}.$$

Alors $\mathbb{N}_0^g \cap \mathbb{N}_0^d = \emptyset$, et $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0^g \cup \mathbb{N}_0^d$. Autrement dit nous avons découpé $\mathbb{N}_0$, qui est infini, en deux morceaux disjoints, $\mathbb{N}_0^g$ et $\mathbb{N}_0^d$. Et donc l'un au moins de ces deux morceaux est infini.

Si $\mathbb{N}_0^g$ est infini, nous pouvons énumérer ses éléments par ordre croissant et poser :

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0^g &= \{\mathbf{n}_1^{(1)} < \mathbf{n}_2^{(1)} < \dots < \mathbf{n}_k^{(1)} < \mathbf{n}_{k+1}^{(1)} < \dots\}.. \\ \mathbf{n}_1 &= \mathbf{n}_1^{(1)}, \quad \mathbb{N}^{(1)} = \{\mathbf{n}_1\}. \\ \mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_0. \\ \mathbf{b}_1 &= \mathbf{m}_0. \\ \mathbf{m}_1 &= \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1}{2}. \\ \mathbf{I}_1 &= [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1]. \\ \mathbb{N}_1 &= \mathbb{N}_0^g \setminus \mathbb{N}^{(1)}. \end{aligned}$$

Reprendre alors l'étape "0" avec la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ dans l'intervalle $[a_1, b_1]$.

Si $\mathbb{N}_0^d$ est infini, nous pouvons énumérer ses éléments par ordre croissant et poser :

$$\mathbb{N}_0^d = \{\mathbf{n}_1^{(1)} < \mathbf{n}_2^{(1)} < \dots < \mathbf{n}_k^{(1)} < \mathbf{n}_{k+1}^{(1)} < \dots\}..$$

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1^{(1)}, \quad \mathbb{N}^{(1)} = \{\mathbf{n}_1\}.$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{m}_0.$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_0.$$

$$\mathbf{m}_1 = \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1}{2}.$$

$$\mathbf{I}_1 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1].$$

$$\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}_0^d \setminus \mathbb{N}^{(1)}.$$

Reprendre alors l'étape "0" avec la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ dans l'intervalle $[a_1, b_1]$.

Le procédé algorithmique ne s'arrête pas et produit une suite croissante $(a_k)_{k \geq 1}$, une suite décroissante $(b_k)_{k \geq 1}$, telles que si $k, k' \geq 1$, $a = a_0 \leq a_k \leq b_{k'} \leq b_0$. Il produit aussi une suite strictement croissante $(n_k)_{k \geq 1}$ telle que si $k' \geq k$, $a_k \leq x_{n_{k'}} \leq b_k$.

De plus par construction toujours, puisqu'à chaque étape on coupe en deux par le milieu, on a $b_k - a_k = (b - a)2^{-k}$ pour chaque k .

Ainsi nos suites $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ sont adjacentes, et la suite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ se retrouve coincée entre les deux. Par écrabouillage, il s'en suit que

$$\exists \lim_k x_{n_k} = \lim_k a_k = \lim_k b_k \in \cap_k [a_k, b_k].$$

■

Exercice : montrer que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la suite $(\cos(nx))_{n \geq 1}$ a une extraite convergente. Si

$x = \pi$, est-ce que la suite $(\cos(n\pi))_{n \geq 1}$ converge ?

Que dire, dans le même ordre d'idées, de la suite $(\tan(nx))_{n \geq 1}$, si $x \notin \cup_{p \geq 1} \frac{\pi}{2p} \mathbb{Z}$?

Est-ce que la suite $(n^2)_{n \geq 1}$ a une extraite qui converge dans $\mathbb{R}$?

Pourquoi n'est-il pas possible, sur ces deux derniers exemples, d'appliquer le théorème

de Bolzano-Weierstrass ?

4.3. Théorème des valeurs intermédiaires.

TVI PRÉLIMINAIRE. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que $f(a)$ et $f(b)$ soient non nuls, et de signes contraires. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Seconde étape : $f([a, b])$ est bornée ? Supposons que $f([a, b])$ ne soit pas majorée, par exemple. Alors pour chaque $n \geq 1$, il existe $y_n \in f([a, b])$ tel que $y_n \geq n$. Et donc il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) \geq n$.

Par le Théorème de Bolzano-Weierstrass, il existerait, puisque $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite bornée (dans $[a, b]$), une extraite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$, et un point $x_\infty \in \mathbb{R}$, tels que $\lim_k x_{n_k} = x_\infty$. Puisque pour chaque k , $a \leq x_{n_k} \leq b$, par théorème d'ordre, il s'en suit que $a \leq x_\infty \leq b$.

Mais alors f est continue en x_∞ , et donc $\lim_k f(x_{n_k}) = f(x_\infty)$. Or pour chaque k , $f(x_{n_k}) \geq n_k$, et puisque la suite d'entiers (n_k) est strictement croissante, $\lim_k n_k = +\infty$. Et donc $f(x_\infty)$ serait un réel plus grand que n'importe quel autre réel, ce qui n'existe pas.

Par l'absurde, donc, f est majorée. On procède de même pour montrer que f est minorée, puis on conclut qu'elle est bornée.

Troisième étape : l'intervalle borné $f([a, b])$ contient ses extrémités ? Pour le moment nous savons simplement qu'il existe deux réels $c < d$ tels que

$$]c, d[\subset f([a, b]) \subset [c, d],$$

et donc il nous reste à prouver que $c, d \in f([a, b])$ pour terminer la preuve de notre théorème.

Montrons que $d \in f([a, b])$. Posons $d_n = d - \frac{d-c}{2^n}$, $n \geq 1$. Alors la suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante, dans $]c, d[\subset f([a, b])$, et qui converge vers d . Pour chaque n , il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) = d_n$. Par Bolzano-Weierstrass, il existe une extraite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ et $x_\infty \in [a, b]$ tels que $x_{n_k} \rightarrow_k x_\infty$. Par continuité de f en x_∞ , on a

$$f(x_\infty) = \lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k d_{n_k} = d,$$

et donc $d \in f([a, b])$. On procède de même pour montrer que $c \in f([a, b])$. ■

Exercices • Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

On suppose que $x \in [a, b] \Rightarrow f(x) > 0$. Utiliser le TVI pour montrer qu'il existe

$m > 0$ tel que $x \in [a, b] \Rightarrow f(x) \geq m$.

• Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une continue. Montrer qu'il existe $x, y \in [a, b]$ tels que

$$z \in [a, b] \Rightarrow f(x) \leq f(z) \leq f(y).$$

• Soit I un intervalle borné et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors le TVI nous

dit que $f(I)$ est un intervalle. Est-il possible que :

- $f(I)$ soit fermé alors que I est ouvert borné ?
- $f(I)$ soit fermé borné et I ouvert ?
- $f(I)$ soit non-borné alors que I l'est ?

4.4. Fonctions continues monotones sur un intervalle.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous dirons que f est **monotone**, et plus spécifiquement **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**), si

$$x < x' \Rightarrow f(x) < f(x') \quad (\text{resp. } x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')).$$

FONCTION CONTINUE MONOTONE SUR UN INTERVALLE. *Supposons que l'application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ soit continue et monotone sur l'intervalle I . Notons g et d les extrémités gauche et droite de I ($g, d \in \mathbb{R} \cap \{\pm\infty\}$).*

Alors les limites $\lim_g f(x)$ et $\lim_d f(x)$ existent. Et si f est croissante, $f(I)$ a pour extrémité gauche $\lim_g f(x)$, et pour extrémité droite $\lim_d f(x)$. Si au contraire f est décroissante, il a pour extrémité gauche $\lim_d f(x)$ et pour extrémité droite $\lim_g f(x)$.

De plus f est bijective de I sur $f(I)$, et $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est continue, et de même sens de monotonie que f .

PREUVE. : évidemment $f : I \rightarrow f(I)$ est surjective. Montrons qu'elle est injective, ce qui, du coup, montrera qu'elle est bijective. Soient $x < x' \in I$. Par monotonie, $f(x) \neq f(x')$, et donc f est injective.

Plaçons nous dans le cas f strictement croissante, par exemple. Par le TVI, $f(I)$ est un intervalle. Soient u et v ses extrémités gauches et droites. Si $u \in f(I)$, et si $g \notin I$, alors $u = f(h)$ pour un $h > g$. Mais si $g < x < h$, on a $f(x) < f(h) = u$, et donc u ne peut être l'extrémité gauche de $f(I)$. Le cas de $v \in f(I)$ se traite de la même façon.

Si $u \notin f(I)$, si $g \in I$, alors $f(g) > u$, et si $u < h < f(g)$, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = h < f(g)$. Donc $h \neq g$ et $h \in I$. Donc $h > g$ et $f(h) < f(g)$, ce qui est contraire à la croissance. Le cas de $v \notin f(I)$ se traite de même.

Pour résumer, $g \in I \Leftrightarrow u \in f(I)$ et $d \in I \Leftrightarrow v \in f(I)$.

Si maintenant par exemple $g \in I$, alors $f(g)$ est, par croissance, nécessairement le plus petit élément de $f(I)$, et donc $f(g) = u$. Mais alors par continuité de f en g , $f(g) = u = \lim_g f(x)$. On procède de même pour montrer que $d \in I \Rightarrow \lim_d f(x) = v = f(d)$.

Si $g \notin I$ et $g \in \mathbb{R}$, soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que $]g, g + \varepsilon_0[\subset I$, et posons, pour $n \geq 1$, $g_n = g + \frac{\varepsilon_0}{2n}$. Alors $g_n \rightarrow g$ en décroissant, et donc $(f(g_n))_{n \geq 1}$ décroît. Deux cas sont possibles : ou bien cette suite est minorée, ou bien elle ne l'est pas.

Supposons qu'elle le soit. Alors elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrons que $\ell = u = \lim_g f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n(\varepsilon)$ tel que $n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \ell \leq f(g_n) < \ell + \varepsilon$. Posons alors $\delta = g_{n(\varepsilon)} - g > 0$. Soit $x \in I \cap]g, g + \delta[$. Alors il existe $n > n(\varepsilon)$ tel que $g_n < x < g_{n(\varepsilon)}$, et par croissance, $\ell \leq f(g_n) < f(x) < f(g_{n(\varepsilon)}) < \ell + \varepsilon$. Et donc $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, et donc $\ell = \lim_g f(x)$.

Supposons qu'elle ne le soit pas. Alors pour chaque $m < 0$, il existe $n(m) \geq 1$ tel que $f(g_{n(m)}) < m$. Et par décroissance de $(f(g_n))$, on en déduit que $\lim_n f(g_n) = -\infty$. Puisque $u \leq \lim_n f(g_n)$, on en déduit que $u = -\infty$. Montrons que $\lim_g f(x) = -\infty$. Soit $m < 0$. Soit $n(m)$ tel que ci-dessus. Posons $\delta = g_{n(m)} - g$. Le même raisonnement que dans le cas minoré précédent permet de conclure.

Le cas $d \notin I$ et $d \in \mathbb{R}$ se traite de même.

Si $g = -\infty$, considérons la suite décroissante des $(g(-n))_{\substack{n \geq 1, \\ -n \in I}}$. Si cette suite n'est pas minorée, alors $u = -\infty$, et on montre sans peine que $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty = \lim_n f(-n)$. Si elle est minorée, elle converge dans $\mathbb{R}$, et on montre sans peine non plus que $\lim_{-\infty} f(x) = u = \lim_n f(-n)$.

Le cas de $d = +\infty$ se traite de façon semblable.

Montrons à présent que l'application réciproque $f^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone croissante, et continue.

Supposons $y < y' \in f(I)$. Alors il existe $x, x' \in I$ tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Comme $y \neq y'$, $x \neq x'$. Et puisque $x' < x \Rightarrow f(x') < f(x)$, ayant supposé $y < y'$, il est nécessaire que $x < x'$. Et donc f^{-1} est strictement croissante, comme f .

Soit $y \in f(I)$. Montrons que f^{-1} est continue en y . Supposons que f^{-1} ne soit pas continue en y . Alors il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour chaque $\delta > 0$, il existe $y_\delta \in I \cap]y - \delta, y + \delta[$ tel que $|f^{-1}(y_\delta) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon$. Faisons $\delta = \frac{1}{n}$, pour chaque $n \geq 1$: notons $y_n = y_{\frac{1}{n}}$: nous en concluons l'existence d'une suite (y_n) dans $f(I)$ qui converge vers y et telle que pour chaque $n \geq 1$, $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon$. Soit $x_g \in (I \cap]f^{-1}(y) - \frac{\varepsilon}{2}, f^{-1}(y)[) \setminus \{f^{-1}(y)\}$ et $x_d \in (I \cap]f^{-1}(y), f^{-1}(y) + \frac{\varepsilon}{2}[) \setminus \{f^{-1}(y)\}$.

Alors pour chaque $n \geq 1$, on aura $f(f^{-1}(y_n)) < f(x_g) < f(f^{-1}(y))$ ou bien $f(f^{-1}(y)) < f(x_d) < f(f^{-1}(y_n))$. Et donc en passant à la limite, par théorème d'ordre, on aura ou bien $f(f^{-1}(y)) \leq f(x_g) < f(f^{-1}(y))$, ou bien $f(f^{-1}(y)) < f(x_d) \leq f(f^{-1}(y))$. Et donc dans tous les cas $f(f^{-1}(y)) < f(f^{-1}(y))$, ce qui est absurde. ■

Exercice : soit $n \geq 1$ et $f_n : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ l'application continue définie par $f_n(x) = x^n$.

Montrer que f_n est strictement croissante. Déterminer $f_n([0, +\infty[)$. Montrer que f_n^{-1} est continue. C'est la fonction racine $n^{\text{ième}}$!!! Notée habituellement

$$\mathbf{f}_n^{-1}(\mathbf{y}) = \sqrt[n]{\mathbf{y}} = \mathbf{x}^{\frac{1}{n}}.$$

4.5. Graphe de f^{-1} .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection de I sur $f(I)$. Son **graphe**, noté G_f , est défini par

$$\mathbf{G}_f = \{(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathbf{I}\}.$$

Puisque $(x, f(x)) \in G_f \Leftrightarrow (f(x), x) \in G_{f^{-1}}$, il s'en suit que $G_{f^{-1}}$ se déduit de G_f par la symétrie axiale d'axe la droite d'équation $y = x$.

Chapitre 5 : dérivées et fonctions usuelles.

5.1. Dérivabilité et fonction dérivée.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un point de I . Nous dirons que f est dérivable en x_0 si il existe $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{\mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0).$$

Nous dirons que f est dérivable à droite en x_0 (resp. à gauche en x_0) s'il existe $f'(x_0^+) \in \mathbb{R}$ (resp. $f'(x_0^-) \in \mathbb{R}$) tel que

$$\lim_{\mathbf{x}_0^+} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0^+) \quad \left(\text{resp.} \quad \lim_{\mathbf{x}_0^-} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0^-) \right).$$

REMARQUE. Puisque la dérivabilité se définit par l'existence d'une limite, il s'en suit (cf. Chap. 3) que f est dérivable en x_0 si et seulement si elle l'est à droite et à gauche en x_0 , et qu'en outre $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

Nous dirons que f est dérivable sur I si elle l'est en tout point de I . Nous noterons alors $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{y}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{y} - \mathbf{x}},$$

et nous l'appellerons la dérivée de f sur I .

PROPOSITION. f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ et une constante $a \in \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x), & x \in I; \\ \lim_{x_0} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

Si tel est le cas, $a = af'(x_0)$.

PREUVE. Si f est dérivable en x_0 , posons à priori $a = f'(x_0)$ et $\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a$ si $x \neq x_0$, et $\varepsilon(x_0) = 0$. Alors les conditions sont satisfaites.

Réciproquement, si ε et a sont donnés, alors $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a + \varepsilon(x) \rightarrow a$, et donc $f'(x_0)$ existe et vaut a . ■

COROLLAIRE. Si f est dérivable en x_0 , elle est continue en x_0 .

PREUVE. Écrivons $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$. Alors $\lim_{x_0} f(x) = f(x_0)$ puisque $a(x - x_0) \rightarrow_{x_0} 0$ et $\varepsilon(x) \rightarrow_{x_0} 0$, et donc f est continue en x_0 . ■

TANGENTE AU GRAPHE, DEMI-TANGENTE. Si f est dérivable en x_0 , le graphe de f admet au point $(x_0, f(x_0))$ une tangente d'équation

$$y - f(x_0) = (x - x_0)f'(x_0).$$

Si $f'(x_0^+)$ (resp. $f'(x_0^-)$) existe, alors le graphe de f admet au point $(x_0, f(x_0))$ une demi-tangente à droite (resp. à gauche) d'équation

$$y - f(x_0) = (x - x_0)f'(x_0^+), \quad x \geq x_0 \quad (\text{resp. } y - f(x_0) = (x - x_0)f'(x_0^-), \quad x \leq x_0).$$

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, alors le graphe admet en ce point une demi-tangente verticale, orientée vers les $y \geq 0$ si la limite est $+\infty$, vers les $y \leq 0$ sinon. La même conclusion vaut s'il s'agit de limites à gauche en x_0 .

Les dérivées étant des limites de “taux d'accroissement”, nous pouvons déduire des résultats correspondants sur les limites, les résultats suivants :

DÉRIVÉES ET OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES. Supposons que $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ soient deux fonctions dérivables en x_0 , et que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

- : si f est constante, f' existe et vaut 0;
- : $\alpha f + \beta g$ est dérivable en x_0 et $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$;
- : fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
- : si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est définie localement en x_0 et de plus est dérivable en x_0 ;

en outre, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

• : la dérivée de $x \mapsto x$ est 1. Et donc tous les polynômes sont dérivables, et leur dérivée est un polynôme. Et la dérivée d'une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) existe là où le polynôme du dénominateur ne s'annule pas, et sa fonction dérivée est encore une fraction rationnelle.

PREUVE. Prouvons la seconde assertion par exemple :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \end{aligned}$$

■

DÉRIVÉE D'UNE COMPOSÉE. Supposons que $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ soient deux applications, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Supposons en outre que $x_0 \in I$, que $f'(x_0)$ existe et que $g'(f(x_0))$ existe aussi. Alors $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 , et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0)).$$

PREUVE. Il existe $\varepsilon_f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varepsilon_g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x_0} \varepsilon_f(x) = \varepsilon_f(x_0) = 0$, et $\lim_{f(x_0)} \varepsilon_g(y) = \varepsilon_g(f(x_0)) = 0$, et que

$$\begin{aligned} g(y) &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(y - f(x_0)) + (y - f(x_0))\varepsilon_g(y); \\ f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon_f(x). \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + (x - x_0) \underbrace{\left[g'(f(x_0))\varepsilon_f(x) + (f'(x_0) + \varepsilon_f(x))\varepsilon_g(f(x)) \right]}_{\varepsilon_{g \circ f}(x)}. \end{aligned}$$

Puisque $f(x) \rightarrow_{x_0} f(x_0)$ (Corollaire), il est clair que $\varepsilon_{g \circ f}(x) \rightarrow_{x_0} 0$. Et de conclure avec la proposition, avec $a = g'(f(x_0))f'(x_0)$. ■

DÉRIVÉE DE L'APPLICATION INVERSE. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement monotone sur I . Notons $J = f(I)$. Supposons que outre f' ne s'annule pas sur I .

Alors $f^{-1} : J \rightarrow I$ est dérivable et

$$(\mathbf{f}^{-1})'(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{f}'(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}))}, \quad x \in J.$$

PREUVE. Notons $g = f^{-1}$. Alors $g \circ f(y) = y$ pour $y \in I$ et $f \circ g(x) = x$ pour $x \in J$. Donc si $x_0 \in J$, avec $f(y) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(y - g(x_0)) + \varepsilon_f(y)(y - g(x_0))$ et $\lim_{g(x_0)} \varepsilon_f(y) = \varepsilon_f(0) = 0$,

$$x = f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + (g(x) - g(x_0))\varepsilon_f(g(x)),$$

et comme $f(g(x_0)) = x_0$, il vient

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{f'(g(x_0)) + \varepsilon_f(g(x))} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f'(g(x_0))},$$

puisque g est continue en x_0 (cf. §4.4.). ■

5.2. Extremas, dérivées et variations.

DÉFINITION. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que

- f a un maximum (resp. minimum) local en x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$);
- f a un extremum local en x_0 si elle a un maximum ou un minimum local en x_0 .

THÉORÈME. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en $x_0 \in I$. Si f a un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

PREUVE. Traitons le cas d'un maximum local. Soit $x_0 \neq x$ et $x \in I$, et notons $T_f(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Par hypothèse, $\lim_{x \rightarrow x_0} T_f(x) = f'(x_0)$, et donc $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} T_f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} T_f(x)$.

Mais si $x > x_0$, $T_f(x) \leq 0$, et donc $f'(x_0) \leq 0$, par passage à la limite et théorème d'ordre. De même, si $x < x_0$, $T_f(x) \geq 0$ et donc $f'(x_0) \geq 0$. Et donc $0 \leq f'(x_0) \leq 0$. ■

THÉORÈME DE ROLLE. Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

PREUVE. Quitte à translater f par une constante, et puisque la dérivée d'une fonction constante est nulle, nous pouvons supposer sans restriction que $f(a) = f(b) = 0$.

Si f est constante, prendre $c = \frac{a+b}{2}$. Sinon, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Supposons par exemple que $f(x_0) > 0$. Puisque $f([a, b]) = [c, d]$ (TVI), on a $d > 0$ et il existe $c \in [a, b]$ tel que $d = f(c)$. Comme $f(a) = f(b) = 0$, $c \in]a, b[$. La fonction f est dérivable et a un maximum local en c . Et donc $f'(c) = 0$. ■

THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS (TAF). Sous les mêmes hypothèses que le précédent, mais sans supposer que $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

PREUVE. Poser $p = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, et $g(x) = f(x) - f(a) - p(x - a)$. Alors g satisfait aux hypothèses du théorème précédent et donc il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui se traduit par $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. ■

Le Corollaire suivant est à la base de la technique que vous avez déjà pratiquée, celle des l'«étude des fonctions avec les tableaux de variations».

COROLLAIRE. Sous les mêmes hypothèses,

- ¹ : si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$;
- ² : si $f'(x) \geq 0$ sur $]a, b[$, alors f est croissante (au sens large) sur $[a, b]$;
- ³ : si $f'(x) > 0$ sur $]a, b[$, alors f est strictement croissante.

PREUVE. Pour •¹, supposons $f' \equiv 0$ et f non constante. Alors il existe $u < v \in [a, b]$ tels que $f(u) - f(v) \neq 0$, et par le TAF appliqué à f sur $[u, v]$, il existe $w \in]u, v[$ tel que $f(v) - f(u) = f'(w)(v - u)$, et donc $f'(w) \neq 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse de •¹.

Pour •², supposons qu'il existe $u < v \in [a, b]$ tels que $f(u) > f(v)$. Alors avec le TAF pour f sur $[u, v]$, il existe $w \in]u, v[$ tel que $0 > f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) \geq 0$, et donc $0 > 0$, ce qui n'est pas.

Pour $\bullet^3$, supposons qu'il existe $u < v \in [a, b]$ tels que $f(u) \geq f(v)$. Alors avec le TAF pour f sur $[u, v]$, il existe $w \in]u, v[$ tel que $0 \geq f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) > 0$, et donc $0 > 0$, ce qui n'est pas. ■

INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS. *Toujours avec nos hypothèses du TAF, supposons qu'en outre il existe un réel M tel que pour chaque $c \in]a, b[$, $|f'(c)| \leq M$. Alors quels que soient $x, y \in [a, b]$,*

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|.$$

PREUVE. Si $x \neq y$, appliquer le TAF à f sur $[x, y]$ en supposant par exemple $a \leq x < y \leq b$. Alors il existe $w \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(w)(y - x)$, et en passant à la valeur absolue, il est aisé de conclure.

Si $x = y$, c'est déjà vrai. ■

RÈGLE DE L'HOSPITAL. *Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$. Supposons que $\lim_{a+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ existe. Alors f est dérivable à droite en a et $f'(a^+) = \ell$.*

PREUVE. Soit $\varepsilon > 0$: il existe $b - a > \delta > 0$ tel que $(|x - a| < \delta) \wedge (x \neq a) \Rightarrow |f'(x) - \ell| < \varepsilon$. Par le TAF, pour un tel x , il existe $y \in]a, x[$ tel que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(y)$, et donc $|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell| < \varepsilon$ pour $x \in]a, a + \delta[$. Ainsi $\lim_{a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$. ■

5.3. Fonctions usuelles.

5.3.1. LOGARITHME NÉPÉRIEN.

DÉFINITION. *La fonction logarithme néperien, notée $x \mapsto \ln x$, est la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en $x = 1$.*

Donc $x \mapsto \ln x$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, où $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, et $\ln 1 = 0$.

PROPRIÉTÉS. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ et $\ln(x^r) = r \ln(x)$, pour tout rationnel r .

Variations et graphe.

x	0	1	$+\infty$
$\ln' x$	+	+	
$\ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

PROPRIÉTÉS. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

FORMES INDÉTERMINÉES. Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

DÉRIVÉE ET PRIMITIVE. Soient u une fonction, D_u son domaine de définition, $D_{u'}$ son domaine de dérivabilité. La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est définie sur $D = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) > 0\}$ et dérivable sur $D' = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_{u'} \text{ et } u(x) > 0\}$.

Pour tout $x \in D'$, $(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Réciproquement, toute fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ continue sur I admet pour primitive sur I la fonction $x \mapsto \ln|u(x)|$.

5.3.2. EXPONENTIELLE.

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] -\infty, +\infty[$.

DÉFINITION. La fonction exponentielle, notée $x \mapsto e^x$, est la bijection réciproque de la fonction $\ln$. C'est donc la fonction de $] -\infty, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ telle que

$$[y = \ln x, x \in]0, +\infty[\text{ équivaut à } [x = e^y, y \in] -\infty, +\infty[$$

PROPRIÉTÉS. $e^x > 0$, $e^{\ln x} = x$, $\ln(e^x) = x$, $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $e^{y-x} = \frac{e^y}{e^x}$.

Variations et graphe.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, car elle a le même sens de variation que la fonction logarithme népérien dont elle est la réciproque.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(e^x)'$	+		
e^x			

LIMITES. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

DÉRIVÉE ET PRIMITIVE. Pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$, $(e^x)' = e^x$.

Soient u une fonction, D_u son domaine de définition, $D_{u'}$ son domaine de dérivabilité.

La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est définie sur D_u et dérivable sur $D_{u'}$.

Pour tout $x \in D_{u'}$, $(e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$.

Réciproquement, toute fonction $x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$ continue sur I admet pour primitive sur I la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$.

5.3.3. LOGARITHME DE BASE a .

DÉFINITION. Soit $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$. La fonction logarithme de base a , notée $x \mapsto \log_a x$, est la fonction définie par $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, $x > 0$.

Pour $a = e$, on retrouve la fonction $\ln$ (puisque $\ln e = 1$).

Pour $a = 10$, on note $\log_{10}$, ou plus simplement $\log$ la fonction appelée logarithme décimal ; elle vérifie : $\log 10^r = r$, pour tout rationnel r .

Variations et graphe.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, du signe de $\ln a$, i.e. > 0 si $a > 1$ et < 0 si $0 < a < 1$.

Pour $a > 1$

x	0	a	$+\infty$
$(\log_a x)'$	+		
$\log_a x$			

Pour $0 < a < 1$

x	0	a	$+\infty$
$(\log_a x)'$	-		
$\log_a x$			

5.3.4. FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a .

Pour tout $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, la fonction $\log_a$ est continue et strictement monotone sur $]0, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] -\infty, +\infty[$.

DÉFINITION. La fonction exponentielle de base a , notée $x \mapsto \exp_a x = a^x$, est la bijection réciproque de la fonction $\log_a$. C'est donc la fonction de $] -\infty, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ telle que

$$[y = \log_a x \wedge x \in]0, +\infty[\text{ équivaut à } [x = \exp_a y = a^y \wedge y \in] -\infty, +\infty[$$

Pour tout $x > 0$, on a $y = \frac{\ln x}{\ln a}$ donc $\ln x = y \ln a$ et $x = e^{y \ln a}$. Ainsi, $\mathbf{a^y = e^{y \ln a}}$.

Remarque. Pour $a = 1$, on peut définir $1^x = e^{x \ln 1} = e^0 = 1$ pour tout réel x .

Dérivée. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$.

Attention ! $(a^x)' \neq x a^{x-1}$.

Variations et graphe.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$, du signe de $\ln a$, i.e. > 0 si $a > 1$ et < 0 si $0 < a < 1$.

Pour $a > 1$			
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(a^x)'$	+		
a^x			

Pour $0 < a < 1$			
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(a^x)'$	+		
a^x			

5.3.5. FONCTIONS SINUS ET ARCSINUS.

La fonction *sinus*, notée $x \mapsto \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, 2π -périodique.

Graphe et variations de sin

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$
$\sin' x$	0	+	0
$\sin x$	-1	0	+1

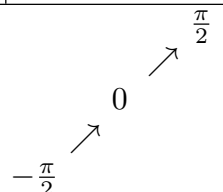
La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. Elle admet donc une bijection réciproque, appelée *arc sinus*, notée $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$, de $[-1, 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, telle que

$$(y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \text{ équivaut à } (x = \operatorname{Arcsin} y, y \in [-1, 1])$$

Dérivées. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sin x)' = \cos x$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $(\operatorname{Arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Ceci utilise la formule de dérivation de l'application réciproque :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Arcsin}'(x) &= \frac{1}{\sin'(\operatorname{Arcsin} x)} \\
 &= \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\operatorname{Arcsin} x)}} \quad (\text{car } \cos \geq 0 \text{ sur } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.
 \end{aligned}$$

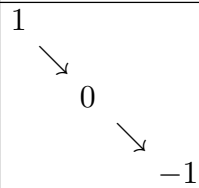
Graphe et variations de Arcsin

x	-1	0	+1
$\text{Arcsin}'x$	+		
$\text{Arcsin}x$			

5.3.6. FONCTIONS COSINUS ET ARCCOSINUS.

La fonction *cosinus*, notée $x \mapsto \cos x$ est définie sur $\mathbb{R}$, paire, 2π -périodique.

Graphe et variations de cos

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos' x$	-		
$\cos x$			

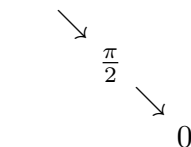
La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$, donc réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Elle admet donc une bijection réciproque, appelée *arc cosinus*, notée $x \mapsto \text{Arcos}x$, de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$, telle que

$(y = \cos x, x \in [0, \pi])$ équivaut à $(x = \text{Arcos}y, y \in [-1, 1])$

Dérivées. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\cos x)' = -\sin x$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $(\text{Arc} \cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. Ceci se calcule aussi par la formule pour l'application inverse :

$$\begin{aligned}
 \text{Arcos}'(x) &= \frac{1}{\cos'(\text{Arcos}x)} \\
 &= \frac{-1}{\sin(\text{Arcos}x)} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos(\text{Arcos}x)}} \quad (\text{car } \sin \geq 0 \text{ sur } [0, \pi]) \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.
 \end{aligned}$$

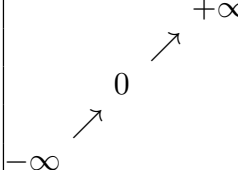
Graphe et variations de Arcos

x	-1	0	+1
$\text{Arcos}'x$	-		
$\text{Arcos}x$	π  $\frac{\pi}{2}$ 0		

5.3.7. FONCTIONS TANGENTE ET ARCTANGENTE.

La fonction *tangente*, notée $x \mapsto \tan x$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, impaire, π -périodique. Sa dérivée vaut alors $\tan' x = 1 + \tan^2 x \geq 1$.

Graphe et variations de $\tan$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan' x$	+		
$\tan x$	 $+\infty$ 0 $-\infty$		

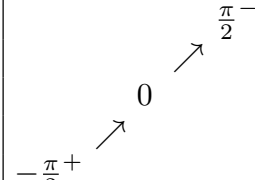
La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une bijection réciproque, appelée *arc tangente*, notée $x \mapsto \text{Arctan}x$, de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, telle que

$$(y = \tan x, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) \text{ équivaut à } (x = \text{Arctan}y, y \in \mathbb{R})$$

La dérivée de Arctan se calcule par la formule désormais habituelle :

$$\begin{aligned}
 \text{Arctan}'(x) &= \frac{1}{\tan'(\text{Arctan}x)} \\
 &= \frac{1}{1 + \tan(\text{Arctan}x)^2} \\
 &= \frac{1}{1+x^2}.
 \end{aligned}$$

Graphe et variations de Arctan

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{Arctan}'x$	$+$		
$\text{Arctan}x$			

5.3.8. VALEURS USUELLES DE SIN, COS ET TAN.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\spadesuit$

5.3.9. SINUS, COSINUS ET TANGENTE HYPERBOLIQUES.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{cases} \text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \text{th}x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{cases}$$

Ces fonctions sont respectivement appelées *sinus hyperbolique*, *cosinus hyperbolique* et *tangente hyperbolique*.

Propriétés. sh et th sont deux fonctions impaires, ch est une fonction paire.

On a aussi des formules de trigonométrie analogues à celles de $\sin$, $\cos$ et $\tan$. La plus importante est

$$\boxed{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1}$$

Dérivées. Variations.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\text{sh}x)' = \text{ch}x$, $(\text{ch}x)' = \text{sh}x$ et $(\text{th}x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x$.

Graphes et variations de sh

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{sh}'x$	$+$	1	$+$
$\text{sh}x$	$-\infty$	0	$+\infty$

Graphe et variations de ch

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch}'x$	$-$	0	$+$
$\text{ch}x$	$+\infty$	1	$+\infty$

Graphe et variations de th

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{th}'x$	$+$	1	$+$
$\text{th}x$	-1^+	0	1^-

5.3.10. FONCTIONS HYPERBOLIQUES RÉCIPROQUES.

La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une bijection réciproque, appelée *argument sinus hyperbolique*, notée $x \mapsto \text{Argsh}x$, de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, telle que

$$(y = \text{sh}x, x \in \mathbb{R}) \text{ équivaut à } (x = \text{Argsh}y, y \in \mathbb{R})$$

Par la formule habituelle,

$$\begin{aligned}
 \text{Argsh}'(x) &= \frac{1}{\text{sh}'(\text{Argsh}x)} \\
 &= \frac{1}{\text{ch}(\text{Argsh}x)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sh}(\text{Argsh}x)^2}} \quad (\text{car } \text{ch} > 0 \text{ et } \text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}
 \end{aligned}$$

Graphe et variations de Argsh

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{Argsh}'x$	$+$	1	$+$
$\text{Argsh}x$	$-\infty$	0	$+\infty$

La fonction ch est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. Elle admet donc une bijection réciproque, appelée *argument cosinus hyperbolique*, notée $x \mapsto \text{Argch}x$, de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, telle que

$$(y = chx, x \in [0, +\infty[) \text{ équivaut à } (x = \text{Argch}y, y \in [1, +\infty[)$$

Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $(\text{Argch}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$: en effet,

$$\begin{aligned}
 \text{Argch}'(x) &= \frac{1}{ch'(\text{Argch}x)} \\
 &= \frac{1}{sh(\text{Argch}x)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{ch(\text{Argch}x)^2 - 1}} \quad (\text{car } sh \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ et } ch^2 - sh^2 = 1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

Graphe et variations de Argch

x	1	$+\infty$
$\text{Argch}'x$	$+$	
$\text{Argch}x$	0	$+\infty$

La fonction th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$. Elle admet donc une bijection réciproque, appelée *argument tangente hyperbolique*, notée $x \mapsto \text{Argth}x$, de $] -1, 1[$ sur $\mathbb{R}$, telle que

$$(y = thx, x \in \mathbb{R}) \text{ équivaut à } (x = \text{Argth}y, y \in] -1, 1[)$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$, $(\operatorname{Argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$. En effet,

$$\begin{aligned}\operatorname{Argth}'(x) &= \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{Argth} x)} \\ &= \frac{1}{1 - \operatorname{th}(\operatorname{Argth} x)^2} \\ &= \frac{1}{1 - x^2}\end{aligned}$$

Graphes et variations de Argth

x	-1	$+1$
$\operatorname{Argth}' x$	+	
$\operatorname{Argth} x$	$-\infty$	$+\infty$

Expressions logarithmiques.

Si deux fonctions sont dérivables sur un intervalle ouvert, et y ont les mêmes dérivées, alors elles diffèrent par une constante. Et sont donc égales si en outre elles coïncident en un point. C'est cette propriété que nous appliquons pour conclure à la validité des trois expressions suivantes :

◇ : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

♣ : pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{Argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

♡ : pour tout $x \in]-1, 1[$, $\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Chapitre 6 : suites.

Rappelons les quelques propriétés des suites énoncées au début du Chapitre 4.

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. Nous dirons qu'elle **converge vers le nombre réel** ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) / (n \geq n(\varepsilon)) \Rightarrow (|x_n - \ell| < \varepsilon).$$

On note alors $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$, $x_n \rightarrow \ell$, ou $\lim_n x_n = \ell$. Par exemple, l'archimédisme montre que la suite $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ converge vers 0.

Nous dirons que $\lim_n x_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) si

$$\begin{aligned} & \forall A > 0, \exists n(A) \geq 1 / n \geq n(A) \Rightarrow x_n > A \\ (\text{resp. } & \forall A < 0, \exists n(A) \geq 1 / n \geq n(A) \Rightarrow x_n < A) \end{aligned}$$

La définition de limite des suites est suffisamment ressemblante à celle de limite d'une fonction en un point, pour que les théorèmes correspondants restent valables : citons les sans preuve :

Unicité de la limite : si $\lim_n x_n = \ell$ et si $\lim_n x_n = \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

Théorèmes algébriques : si $x_n \rightarrow \ell$ et $y_n \rightarrow \ell'$, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

– **Limite d'une combinaison linéaire** : $\alpha x_n + \beta y_n \rightarrow \alpha \ell + \beta \ell'$.

– **Limite d'un produit** : $x_n y_n \rightarrow \ell \ell'$.

– **Limite d'un quotient** : si $y_n \neq 0$ et $\ell' \neq 0$, $x_n / y_n \rightarrow \ell / \ell'$.

Théorème d'ordre : si en outre pour chaque n , $x_n \leq y_n$, alors $\ell \leq \ell'$.

Ecrabouillage : si $(z_n)_{n \geq 1}$ est une troisième suite, telle que pour chaque n , $x_n \leq z_n \leq y_n$, et si $\ell = \ell'$, alors $z_n \rightarrow \ell$.

CONVERGENCE D'UNE SUITE DANS $\mathbb{C}$. Une suite $(z_n)_{n \geq 1}$ dans $\mathbb{C}$ converge vers $z \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - z| \rightarrow 0$. Ceci équivaut à ce que simultanément $\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$.

Exercice : montrer que la suite $(e^{i\frac{\theta}{n}})_{n \geq 1}$ converge et trouver sa limite.

6.1. La suite géométrique (a^n) .

DÉFINITION ET CONVERGENCE. Soit $a \in \mathbb{C}$. La suite géométrique de raison a est la suite $(a^n)_{n \geq 1}$. Alors

- : si $|a| < 1$, $\lim_n a^n = 0$;
- : si $a \in \mathbb{R}$ et $a > 1$, $\lim_n a^n = +\infty$;
- : si $a \neq 1$, $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$;
- : et donc si $|a| < 1$, $\lim_n (1 + a + \dots + a^n) = \frac{1}{1-a}$.

PREUVE. Exercice ! ■

CONVERGENCE DES SOUS-SUITES ET CONVERGENCE. Si la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, alors toutes ses sous-suites convergent vers ℓ .

Si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n \geq 1}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 1}$ convergent vers ℓ , alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers ℓ .

PREUVE. Exercice ! ■

6.2. Quelques suites remarquables.

$\frac{a^n}{n^p}$ AVEC $a \in \mathbb{R}$ ET $p \geq 1$: CONVERGENCE ET DIVERGENCE. Si $|a| \leq 1$, $\lim_n \frac{a^n}{n^p} = 0$. Si par contre $a \in \mathbb{R}$ et $a > 1$, $\lim_n \frac{a^n}{n^p} = +\infty$.

PREUVE. Si $|a| \leq 1$, alors pour chaque $n \geq 1$, $\left| \frac{a^n}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}$, et donc par écrabouillage, $\lim_n \frac{a^n}{n^p} = 0$.

Si par contre $a \in \mathbb{R}$ et $a > 1$, alors $\ln\left(\frac{a^n}{n^p}\right) = n \ln a - p \ln n = n(\ln a - p \frac{\ln n}{n})$. Et $\lim_n \frac{\ln n}{n} = 0$, donc $\lim_n \ln a - p \frac{\ln n}{n} = \ln a > 0$ car $a > 1$. Donc $\lim_n \ln\left(\frac{a^n}{n^p}\right) = +\infty$, et donc en passant à l'exponentielle, $\lim_n \frac{a^n}{n^p} = +\infty$. ■

$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq L < 1$: CONVERGENCE ET DIVERGENCE. Si il existe $0 < L < 1$ et n_0 tels que pour $n \geq n_0$, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq L$, alors $\lim_n u_n = 0$.

PREUVE. Soit $p \geq n_0$: alors nous pouvons écrire de proche en proche

$$|u_{p+1}| = |u_p| \left| \frac{u_{p+1}}{u_p} \right| \leq |u_{p-1}| \left| \frac{u_p}{u_{p-1}} \right| \left| \frac{u_{p+1}}{u_p} \right| \leq \dots \leq |u_{n_0}| \left| \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \right| \dots \left| \frac{u_{p+1}}{u_p} \right| \leq |u_{n_0}| L^{p+1-p_0}.$$

Puisque $|L| < 1$, $\lim_p L^p = 0$, et donc avec le calcul précédent, par écrabouillage, $\lim_p u_p = 0$. ■

COROLLAIRE. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, $\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$.

PREUVE. Si $a = 0$, le résultat est évident. Sinon posons $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Alors $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|a|}{n+1} \rightarrow 0$, et donc il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \frac{1}{2}$. On applique le résultat précédent pour conclure. ■

LA SUITE $(\sqrt[n]{a})_{n \geq 1}$ POUR $a > 0$. Pour tout $a > 0$, on a $\lim_n \sqrt[n]{a} = 1$.

PREUVE. On observe, par continuité et bijectivité du $\ln$, que $\lim_n \sqrt[n]{a} = 1 \Leftrightarrow \lim_n \ln(\sqrt[n]{a}) = 0$, ce qui est vrai puisque $\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{\ln a}{n} \rightarrow 0$. ■

6.3. Approximation décimale d'un nombre réel.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 0$, posons $u_n = \frac{E(10^n a)}{10^n}$, où E désigne la fonction partie entière. Les nombres réels u_n sont des nombres décimaux (i.e. des rationnels dont le dénominateur est une puissance de 10).

Par définition de la partie entière, nous avons

$$E(10^n a) \leq 10^n a < E(10^n a) + 1,$$

et donc

$$u_n \leq a < u_n + \frac{1}{10^n}.$$

On a donc $\lim_n u_n = a$, puisque $|a - u_n| < \frac{1}{10^n}$.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ s'appelle l'approximation décimale de a . Montrons qu'elle est croissante. Pour cela remarquons que si $x \in \mathbb{R}$, $10E(x)$ est un entier plus petit que $10x$, et donc $10E(x) \leq E(10x)$, par définition de la partie entière. Et donc on a $10E(10^n a) \leq E(10^{n+1}a)$, d'où, en divisant par 10^{n+1} ,

$$\frac{E(10^n a)}{10^n} \leq \frac{E(10^{n+1}a)}{10^{n+1}},$$

c'est à dire $u_n \leq u_{n+1}$.

Chapitre 7 : groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels.

Ce Chapitre présente quelques structures algébriques typiques, et qui sont à la base de nombreux résultats profonds de mathématiques.

7.1. Groupe.

DÉFINITION. *Un groupe est un couple $(G, \cdot)$ où G est un ensemble, $\cdot : G \times G \rightarrow G$ est une application, ayant les propriétés suivantes (on note $\cdot(g, g') = g \cdot g'$, $g, g' \in G$) :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & : \quad g \cdot (g' \cdot g'') = (g \cdot g') \cdot g'' \text{ (associativité);} \\ (ii) & : \quad \exists e \in G / \forall g \in G, e \cdot g = g \cdot e = g \text{ (élément neutre);} \\ (iii) & : \quad \forall g \in G, \exists g' \in G / g \cdot g' = g' \cdot g = e \text{ (inverse).} \end{array} \right.$$

On appelle “.” la loi du groupe G . Le neutre et l'inverse sont uniques.

Un groupe est commutatif si $g \cdot g' = g' \cdot g$ quels que soient $g, g' \in G$. On le note alors souvent additivement, i.e. en lieu de “.” on marque “+”.

Exercices :

- Montrer que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.
- Est-ce que $(\mathbb{N}, +)$ est un groupe ?
- Est-ce que $(\mathbb{R}, \times)$ est un groupe ?
- Que dire de $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$?
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et notons $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues, définies sur I et à valeurs réelles. Définir une loi “+” naturelle de sorte à ce que $(\mathcal{C}(I), +)$ soit un groupe.
- Même question que la précédente mais pour $\mathcal{C}^1(I)$, l'ensemble des fonctions dérivables et à dérivée continue sur I , à valeurs réelles.

7.2. Anneau.

DÉFINITION. *Un anneau est un triplet $(A, +, \cdot)$ où $(A, +)$ est un groupe commutatif et $\cdot : A \times A \rightarrow A$ est une application telle que*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & : \quad a \cdot (a' \cdot a'') = (a \cdot a') \cdot a'' \text{ (associativité);} \\ (ii) & : \quad a \cdot (a' + a'') = (a \cdot a') + (a \cdot a'') \text{ (distributivité à gauche);} \\ (iii) & : \quad (a' + a'') \cdot a = (a' \cdot a) + (a'' \cdot a) \text{ (distributivité à droite).} \end{array} \right.$$

Un anneau est commutatif si la loi “.” l'est. Il est unitaire si il existe un élément neutre pour la loi multiplicative “.”.

Exercices :

- Montrer que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sont des anneaux unitaires commutatifs.
- Qu'en est-il de $(\mathcal{C}(I), +, \times)$ et de $(\mathcal{C}^1(I), +, \times)$?

7.3. Corps.

DÉFINITION. *Un corps est un anneau unitaire $(K, +, \times)$ tel que si 0_K désigne l'élément neutre du groupe $(K, +)$, alors $(K \setminus \{0_K\}, \times)$ soit un groupe. Un corps commutatif est un corps qui soit un anneau commutatif.*

Exercices :

- Est-ce que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps ?
- Et $(\mathbb{R}, +, \times)$? $(\mathbb{I}, +, \times)$? $(\mathbb{Q}, +, \times)$?
- Et $(\mathcal{C}(I), +, \times)$?

7.4. Espaces vectoriels.

DÉFINITION. *Un espace vectoriel sur le corps $(K, +, \times)$ est un triplet $(E, \cdot, \diamond)$ où $(E, \cdot)$ est un groupe commutatif et $\diamond : K \times E \rightarrow E$ est une application telle que, si $\mathbf{1}$ désigne l'élément neutre de $(K \setminus \{0\}, \times)$,*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & : k \diamond (k' \diamond e) = (k \times k') \diamond e; \\ (ii) & : (k \diamond e) \cdot (k' \diamond e) = (k + k') \diamond e; \\ (iii) & : k \diamond (e \cdot e') = (k \diamond e) \cdot (k \diamond e'); \\ (iv) & : \mathbf{1} \diamond e = e. \end{array} \right.$$

*On appelle souvent les éléments de E les **vecteurs**, et ceux de K , les **scalaires**.*

Exercices :

- Est-ce que $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{Q}$?
- Est-ce que $\mathcal{C}^1(I)$ en est un sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
- Est-ce que $\mathbb{R}^3$ en est un sur $\mathbb{R}$? Préciser les opérations naturelles.

Chapitre 8 : arithmétique des polynômes sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et décomposition des fractions rationnelles.

Dans ce Chapitre nous désignerons par K le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Certains énoncés nécessiteront de distinguer le cas réel du cas complexe, ce qui sera précisé.

Ce cours est plutôt tourné vers l'analyse, et en l'occurrence, le chapitre qui suit, est pour l'essentiel destiné à introduire la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles, qui par la suite sera utilisée pour les méthodes d'intégration des fractions rationnelles.

En conséquence quelques uns des résultats énoncés ci-après sont démontrés, mais la plupart seront admis.

8.1. Degré et valuation.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans K , noté $K[X]$, est l'ensemble des fonctions $P : K \rightarrow K$ de la forme

$$P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n,$$

où $(a_0, \dots, a_n)$ est une suite finie dans K . Le produit de deux polynômes en est un, de même que la somme ou la combinaison linéaire.

La suite $(a_0, \dots, a_n)$ détermine entièrement le polynôme P , au sens suivant : supposons que $Q(X) \in K[X]$ soit un autre polynôme, $Q(X) = b_0 + \dots + b_mX^m$. Alors

$$P = Q \iff \begin{cases} \text{si } n \leq m, a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n, b_{n+1} = \dots = b_m = 0; \\ \text{si } n \geq m, a_0 = b_0, \dots, a_m = b_m, a_{m+1} = \dots = a_n = 0. \end{cases}$$

Donc modulo le fait que l'on puisse "rajouter" des coefficients nuls, la suite $(a_0, \dots, a_n)$ identifie entièrement le polynôme P , et s'appelle la suite de ses coefficients. Par exemple, la suite des coefficients du polynôme nul est $(0, \dots, 0)$.

Si un polynôme P est non nul, il a un coefficient non nul au moins, et donc il existe un plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$. On appelle cet entier n le degré de P , et on le note $\deg(P)$.

Si P et Q sont deux polynômes, il est facile de constater que

$$\begin{cases} PQ = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0; \\ PQ \neq 0 \Rightarrow \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q). \end{cases}$$

Aussi, si $P \neq 0$, il existe un plus petit entier m tel que $a_m \neq 0$, que l'on appelle la valuation de P , notée $\text{val}(P)$. Donc pour un polynôme non nul, on peut écrire

$$P(X) = a_{\text{val}(P)}X^{\text{val}(P)} + a_{\text{val}(P)+1}X^{\text{val}(P)+1} + \dots + a_{\deg(P)}X^{\deg(P)},$$

et alors la suite "minimale" de coefficients de P , qui le détermine entièrement, est la suite

$$(0, 0, \dots, 0, a_{\text{val}(P)}, a_{\text{val}(P)+1}, \dots, a_{\deg(P)}).$$

Si le polynôme P est non nul, $a_{\deg(P)}$ s'appelle le coefficient unitaire de P . Le polynôme P est dit unitaire ou normalisé s'il est non nul et si son coefficient unitaire vaut 1.

Deux polynômes P et Q sont dits associés s'il existe $\lambda \in K$ tel que $P = \lambda Q$ ou $Q = \lambda P$: autrement dit s'ils sont proportionnels.

Exercice : développement limité d'un polynôme. Soit $P(X) = a_0 + \dots + a_n X^n$ un polynôme. Nous pouvons l'interpréter comme une fonction à valeurs dans K de la variable réelle X . Alors il a des dérivées de tous ordres.

Montrer que quel que soit $a \in \mathbb{R}$,

$$P(X) = P(a) + (X - a)P'(a) + \dots + \frac{(X - a)^m}{m!} P^{(m)}(a) + \dots + \frac{(X - a)^n}{n!} P^{(n)}(a).$$

On appelle cette formule le développement de Taylor de P en a .

8.2. Division euclidienne dans $K[X]$, pgcd, ppcm, et décomposition.

THÉORÈME. Soient A et B deux polynômes dans $K[X]$, tels que $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $K[X]$ tels que

$$A = BQ + R \text{ et } R = 0 \text{ ou } \deg(R) < \deg(B).$$

On appelle alors Q le quotient de la division euclidienne de A par B , et R le reste.

PREUVE. Notons $B(X) = b_0 + \dots + b_p X^p$, avec $\deg(B) = p$.

Montrons d'abord l'unicité : supposons que deux couples (Q, R) et (Q', R') satisfassent aux conclusions du théorème. Alors $B(Q - Q') = R' - R$. Donc si $R' = R$, alors $B(Q - Q') = 0$, et comme $B \neq 0$, $Q' = Q$. Sinon, $\deg(R' - R) \leq \max\{\deg(R), \deg(R')\} < \deg(B)$, et $\deg(B(Q' - Q)) \geq \deg(B)$, ce qui mène à une contradiction.

Si $A = 0$, $Q = R = 0$ fonctionne. Sinon, pour ce qui est de l'existence, montrons la par récurrence sur $\deg(A) = n$, en supposant $A \neq 0$:

Initialisation : supposons $\deg(A) = 0$, si $\deg(A) < \deg(B)$, choisir $(Q, R) = (0, A)$, qui convient très bien. Sinon, $\deg(B) = 0$, alors $B = b_0$, et $A = a_0$ avec $a_0 \neq 0$ et $b_0 \neq 0$. Écrire $A = b_0 \frac{a_0}{b_0}$, et $(Q, R) = (\frac{a_0}{b_0}, 0)$ convient très bien.

Induction : supposons que tout polynôme de degré au plus n admette la décomposition recherchée dans sa division euclidienne par B . Alors soit A un polynôme de degré $n + 1$: alors clairement on peut écrire $A(X) = a_{n+1}X^{n+1} + C(X)$ où $C(X)$ est un polynôme nul ou de degré au plus n , et $a_{n+1} \neq 0$.

Si $\deg(A) < \deg(B)$, le couple $(Q, R) = (0, A)$ convient très bien. Sinon, le polynôme $A_1(X) = A(X) - \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} B(X)$ est un polynôme nul ou de degré au plus n . Il existe donc un couple unique (Q_1, R_1) tel que $A_1 = BQ_1 + R_1$, et R_1 est nul ou de degré au plus $p - 1$. Alors

$$A(X) = A_1(X) + \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} B(X) = B(X) \left(Q_1(X) + \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} \right) + R_1(X),$$

et l'on a trouvé un couple (Q, R_1) satisfaisant aux conditions souhaitées. ■

La preuve qui précède recèle une méthode effective pour la pratique de la division euclidienne des polynômes : voici un exercice qui illustre bien cette remarque.

Exercice : faire la division euclidienne de $A(X) = 2X^5 + 3$ par $B(X) = X^2 + X + 1$.

DÉFINITION. Si B est un polynôme non nul, nous dirons qu'il divise un polynôme A , si dans la division euclidienne de A par B , le reste est nul, i.e. $A = BQ$ pour un certain polynôme Q .

Nous dirons que deux polynômes non nuls P et T sont premiers entre eux si tout diviseur de P de degré non nul n'en est pas un de T , et réciproquement.

ALGORITHME D'EUCLIDE ET PGCD. Soient P et T deux polynômes non nuls, alors l'algorithme d'Euclide consiste à injecter le couple (P, T) dans la "machine" suivante, et ce répétitivement, jusqu'à ce que la machine s'arrête d'elle-même :

1 : diviser P par T , et obtenir $P = TQ + R$.

2 : si $R = 0$, le pgcd de (P, T) est T .

3 : si $R \neq 0$, recommencer l'étape **1** avec le couple (T, R) .

Au bout du compte, le pgcd de (P, T) sera sorti à une étape **2**, ce qui se produira au bout d'un nombre fini d'étapes, puisque les degrés décroissent.

Exercice : trouver le pgcd de $X^3 - 1$ et de $X^2 - 2X + 1$.

PPCM. Le ppcm de deux polynômes non nuls P et T est, à la multiplication par une constante près, le polynôme de plus faible degré qui soit simultanément divisible par P et par T .

Pour le trouver, il suffit d'avoir le pgcd, car

$$PT = \text{pgcd}(P, T) \times \text{ppcm}(P, T).$$

DÉFINITION-THÉORÈME. Deux polynômes non nuls sont premiers entre eux si leur pgcd est un polynôme de degré nul.

Un polynôme non nul est dit premier si ses seuls diviseurs sont ses associés ou les constantes de K .

Les polynômes premiers de $\mathbb{C}[X]$ sont ceux qui sont de degré 1 ou 0.

Les polynômes premiers de $\mathbb{R}[X]$ sont ceux qui sont de degré 0, ou 1, ou encore les polynômes de degré 2 sans racines réelles.

Tout polynôme non nul de $K[X]$ admet, modulo la multiplication par les constantes, une unique décomposition sous la forme d'un produit de puissances de polynômes premiers, i.e.

$$P(X) = P_1^{\alpha_1}(X) P_2^{\alpha_2}(X) \dots P_k^{\alpha_k}(X),$$

où les P_j sont des polynômes premiers.

8.3. Racines et facteurs premiers.

DÉFINITION - THÉORÈME. *Le nombre $a \in K$ est une racine du polynôme non nul P si $P(a) = 0$.*

Pour que a soit une racine de P , il faut et il suffit que $X - a$ divise $P(X)$.

On dit que a est une racine d'ordre m (ou un zéro de multiplicité m) de P lorsque $(X - a)^m$ divise $P(X)$ et $(X - a)^{m+1}$ ne divise pas $P(X)$.

PREUVE. On écrit, si $\deg(P) = n$,

$$P(X) = P(a) + (X - a)P'(a) + \dots + \frac{(X - a)^n}{n!}P^{(n)}(a),$$

et alors il est clair que $X - a$ divise P si et seulement si $P(a) = 0$. ■

MÉTHODE PRATIQUE DE RECHERCHE DE LA DÉCOMPOSITION EN FACTEURS PREMIERS DE $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$. *On cherche d'abord les racines complexes de P . Elles sont disons $r_1, \dots, r_k$, et r_j a la multiplicité m_j . Alors si $\deg(P) = n$ et le coefficient unitaire de P est a_n , on a*

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}) = \mathbf{a}_n(\mathbf{X} - \mathbf{r}_1)^{m_1} \dots (\mathbf{X} - \mathbf{r}_k)^{m_k}.$$

Ensuite, puisque $P \in \mathbb{R}[X]$, si r_j est une racine complexe de P , $\bar{r}_j$ est aussi une racine complexe de P . Notons $c_1, \dots, c_l$ les racines complexes de P . Alors $(X - c_t)^{m_t}(X - \bar{c}_t)^{m_t} = (X^2 - (c_t + \bar{c}_t)X + |c_t|^2)^{m_t}$ divise $P(X)$, et donc $P(X)$, en regroupant, s'écrit comme un produit de puissances de polynômes réels de degré 2 sans racines réelles, fois un produit de puissances de polynômes réels de degré 1.

Citons un dernier résultat utile :

PROPOSITION. *Si P et Q sont deux polynômes non nuls premiers entre eux, et si P et Q divisent un troisième polynôme S , alors le produit PQ divise S .*

Et si $\text{pgcd}(P, Q) = 1$, si S et T sont deux polynômes non nuls, et si $PS = QT$, alors Q divise S et P divise T .

Identité de Bezout : *si $\text{pgcd}(P, Q) = 1$, il existe deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$.*

PREUVE. C'est une conséquence directe de la décomposition des polynômes en facteurs premiers. Pour l'identité de Bezout, nous esquivons ! ■

8.4. Fractions rationnelles - décomposition en éléments simples.

Une fraction rationnelle est un quotient $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ où P et Q sont deux polynômes, avec Q non nul.

Une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est dite irréductible si $\text{pgcd}(P, Q) = 1$.

La partie entière d'une fraction rationnelle est le quotient $E(F)$ dans la division euclidienne de P par Q . Si R désigne le reste, on a donc

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}(\mathbf{F}) + \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{Q}}, \text{ avec } \mathbf{R} = \mathbf{0} \text{ ou } \deg(\mathbf{R}) < \deg(\mathbf{Q}).$$

THÉORÈME DE BASE POUR LA DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES. Soit $F = \frac{A}{B_1 B_2}$ une fraction rationnelle de partie entière nulle. Alors si B_1 et B_2 sont premiers entre eux, il existe un unique couple (A_1, A_2) de polynômes de $K[X]$ tel que

$$\begin{cases} - \text{les deux fractions } \frac{A_1}{B_1} \text{ et } \frac{A_2}{B_2} \text{ sont de parties entières nulles;} \\ - \frac{A}{B_1 B_2} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2}. \end{cases}$$

PREUVE. Montrons d'abord l'unicité. Si un autre couple (A'_1, A'_2) convient, alors on a l'égalité $\frac{A'_1 - A_1}{B_1} = \frac{A_2 - A'_2}{B_2}$, et donc $B_1(A_2 - A'_2) = B_2(A'_1 - A_1)$. Puisque $\text{pgcd}(B_1, B_2) = 1$, il s'en suit que si $A_1 \neq A'_1$, alors B_1 divise $A'_1 - A_1$ et B_2 divise $A_2 - A'_2$. Or $\deg(A'_1 - A_1) \leq \max\{\deg(A_1), \deg(A'_1)\} < \deg(B_1)$, une contradiction. D'où l'unicité.

Pour l'existence, par Bezout, il existe U, V deux polynômes tels que $UB_1 + VB_2 = 1$, et donc

$$\frac{A}{B_1 B_2} = \frac{AUB_1}{B_1 B_2} + \frac{AVB_2}{B_1 B_2} = \frac{AU}{B_1} + \frac{AV}{B_2}.$$

Notons $E_1 = E(\frac{AU}{B_1})$ et $E_2 = E(\frac{AV}{B_2})$. Alors il existe A_1 et A_2 tels que $E(\frac{A_1}{B_1}) = E(\frac{A_2}{B_2}) = 0$, et

$$\frac{A}{B_1 B_2} = E_1 + E_2 + \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2},$$

et alors $E_1 + E_2 = E(\frac{A}{B_1 B_2}) = 0$, d'où l'existence de la décomposition recherchée. ■

THE BIG THÉORÈME - DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES. Soit F une fraction rationnelle, soient A et B deux polynômes premiers entre eux, tels que $F = \frac{A}{B}$, et supposons $\deg(B) \geq 1$.

Soit $B = \lambda B_1^{\alpha_1} \dots B_n^{\alpha_n}$ la décomposition en produit de puissances de facteurs premiers unitaires de B , avec $\lambda \neq 0$ et $\alpha_i \geq 1$.

Alors il existe une unique famille de polynômes de $K[X]$, notés E et C_{ij} , $1 \leq j \leq \alpha_i$, $1 \leq i \leq n$, telle que

$$F = E + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{C_{ij}}{B_i^j} \right), \text{ et } E = E(F) \text{ et } \deg(C_{ij}) < \deg(B_i).$$

Exercice : décomposer les fractions $\frac{1}{X^2(X-1)^3}$, $\frac{1}{(X^2+1)^2-X^2}$, $\frac{1}{(X^2-1)(X^2+1)^2}$, $\frac{X^7+1}{X^2(X-1)^4}$, $\frac{X^2+1}{(X-1)^2(X^2-X+1)^4}$.

Chapitre 9 : intégrales et primitives.

Dans ce Chapitre, a et b désignent deux réels tels que $a < b$, et I l'intervalle $[a, b]$.

9.1. Intégrale d'une fonction étagée.

Une **subdivision** de I est une suite finie de nombres réels $x_0, \dots, x_n$ tels que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **étagée** s'il existe une subdivision de I , $x_0, \dots, x_n$, telle que f soit constante sur chacun des sous-intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. Une telle subdivision est dite **adaptée** à f .

Si tel est le cas, il existe des nombres m_i , $0 \leq i < n$, tels que $f \equiv m_i$ sur $]x_i, x_{i+1}[$.

PROPRIÉTÉ DE BASE - INTÉGRALE D'UNE FONCTION ÉTAGÉE. *Si f est simple et la subdivision $x_0, \dots, x_n$ est adaptée à f alors le nombre*

$$\int_a^b f(x)dx := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

ne dépend pas de la subdivision adaptée considérée.

On l'appelle l'intégrale de f sur I .

PREUVE. Si l'on considère deux subdivision adaptées, il suffit d'en construire une troisième qui soit la "réunion" des deux considérées, et de montrer que le nombre obtenu pour chacune des deux coïncide avec celui associé à la troisième. ■

Exemple : $f(x) = E(\frac{x}{8})$ sur $I = [0, 200]$.

C'est une fonction en escalier... et $\int_0^{200} f(x)dx = \sum_{i=0}^{199} i = \frac{199 \times 200}{2} = 19900$.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE POUR LES ÉTAGÉES POSITIVES. Si f est étagée positive, alors $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire, dans le plan orthornormé $\mathbb{R}^2$, de la région située entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, sous le graphe de f , et au-dessus de l'axe des abscisses.

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DE L'INTÉGRALE. Si f et g sont étagées sur I , si $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + g$, $|f|$, et λf le sont, et

- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
- $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$;
- $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$;
- $\forall c \in I, \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;
- $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

PREUVE. Il s'agit de revenir à la définition de l'intégrale d'une fonction étagée sur I , en faisant intervenir des subdivisions adaptées. Sans difficulté. ■

9.2. Fonctions intégrables sur I .

DÉFINITION - INTÉGRABILITÉ. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable si quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions étagées u et U sur I telles que

$$\begin{cases} u \leq f \leq U; \\ \int_a^b (U(x) - u(x))dx \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Remarquons qu'une étagée est intégrable ($u = f = U$), et qu'une intégrable est bornée, puisque les étagées le sont.

Supposons f intégrable, et notons $A(f)$ (resp. $B(f)$) l'ensemble des fonctions étagées $u \leq f$ (resp. $U \geq f$). Ce sont deux ensembles non vides, et si $u \in A(f)$ et $U \in B(f)$, alors

$$\int_a^b u(x)dx \leq \int_a^b U(x)dx.$$

Considérons ensuite $i(f) = \{\int_a^b f(x)dx : u \in A(f)\}$ et $I(f) = \{\int_a^b U(x)dx : U \in B(f)\}$. Ce sont deux ensembles non-vides de $\mathbb{R}$, tels que $\alpha \in i(f)$ et $\beta \in I(f)$ entraîne $\alpha \leq \beta$.

En outre quel que soit $\varepsilon > 0$, par intégrabilité de f , il existe $\alpha \in i(f)$ et $\beta \in I(f)$ tels que $\beta - \alpha \leq \varepsilon$.

Faisons "varier" ε en choisissant successivement $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. Alors nous obtenons deux suites $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ dans $i(f)$ et $(\beta_n)_{n \geq 1}$ dans $I(f)$ telles que $\alpha_n \leq \beta_p$ pour tous n et p , et $\lim_n \beta_n - \alpha_n = 0$.

Ce sont donc des suites adjacentes, nous noterons $\int_a^b f(x)dx$ leur limite commune. Nous admettrons que ce nombre ne dépend pas des suites choisies, et est le seul nombre

tel que quels que soient $\alpha \in i(f)$ et $\beta \in I(f)$,

$$\alpha \leq \int_a^b f(x)dx \leq \beta.$$

Ce sera par définition **la valeur de l'intégrale de f** . Remarquons que cette définition est compatible avec celle introduite précédemment de la valeur de l'intégrale d'une fonction étagée.

PROPRIÉTÉ IMPORTANTE ET CRITÈRE D'INTÉGRABILITÉ. *Supposons que f soit telle qu'il existe deux suites de fonctions étagées sur I , $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(U_n)_{n \geq 1}$, telles que $u_n \leq f \leq U_n$ pour tout $n \geq 1$, et que $\int_a^b (U_n - u_n)(x)dx \rightarrow_n 0$. Alors f est intégrable, et*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_n \int_a^b u_n(x)dx = \lim_n \int_a^b U_n(x)dx.$$

Par passage à la limite sur les propriétés simples énoncées pour les intégrales des fonctions étagées, nous pouvons reporter la validité des propriétés correspondantes concernant les fonctions intégrables :

PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE. *Par passage à la limite, ce qui était vrai de l'intégrale d'une fonction étagée le reste de celle d'une fonction intégrable : supposons f et g intégrables sur I , et $\lambda \in \mathbb{R}$; alors*

- $f + g$ est intégrable et $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
- λf est intégrable et $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$;
- $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$;
- $\forall c \in I$, f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, et $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;
- s'il existe m et M dans $\mathbb{R}$ tels que $m \leq f \leq M$, alors $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$;
- $|f|$ est intégrable et $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

REMARQUE IMPORTANTE. *Supposons que f soit intégrable sur I et que $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ne diffère de f qu'en un nombre fini de points de I . Alors g est intégrable aussi, et son intégrale vaut celle de f .*

La question maintenant est de savoir si à part les fonctions étagées, d'autres fonctions sont intégrables (sinon nous aurions fait beaucoup d'efforts pour rien). Voici deux réponses :

INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS CONTINUES. *Si f est continue sur I , elle est intégrable.*

PREUVE. La preuve repose sur l'utilisation de la notion d'uniforme continuité, et le TVI. Nous admettrons ce résultat. ■

PROPOSITION - THÉORÈME DE LA MOYENNE. *Si f est continue sur I , alors il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

PREUVE. D'après le TVI, $f([a, b]) = [m, M]$ est un intervalle fermé borné, et $m \leq f \leq M$ sur I . Donc $(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M$, et donc $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \in [m, M] = f([a, b])$. Et donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$. ■

INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS MONOTONES. *Si f est monotone sur I , elle est intégrable.*

PREUVE. Supposons par exemple f croissante. Soit $n \geq 1$ et notons $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$, pour $0 \leq i \leq n$ (alors $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$). Notons

$$u_n(x) = \begin{cases} f(x_i) & \text{si } x_i \leq x < x_{i+1} \text{ et } i < n; \\ f(b) & \text{si } x = b; \end{cases}$$

$$U_n(x) = \begin{cases} f(x_{i+1}) & \text{si } x_i < x \leq x_{i+1} \text{ et } i < n; \\ f(a) & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Alors u_n et U_n sont étagées sur I , $u_n \leq f \leq U_n$, et

$$\int_a^b (U_n(x) - u_n(x))dx = \frac{(b-a)}{n} (f(b) - f(a)) \rightarrow_n 0.$$

Donc f est intégrable et $\lim_n \int_a^b u_n(x)dx = \lim_n \int_a^b U_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. ■

On peut démontrer le résultat suivant, que nous admettrons, et qui dans la pratique permet de déterminer certaines limites de suites :

INTÉGRABILITÉ ET LIMITES DE SUITES. *Soit $(x^{(n)})_{n \geq 1}$ une suite de subdivisions de I . Notons*

$$x^{(n)} = (a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{p_n}^{(n)} = b).$$

Notons $p(x^{(n)}) = \max\{x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)} : 0 \leq i < p_n\}$ le nombre qui par définition s'appelle le pas de la subdivision $x^{(n)}$.

Supposons f intégrable sur I . Supposons que pour chaque n et pour chaque $0 \leq i < p_n$, $\alpha_i^{(n)} \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]$ ait été choisi. Alors si $p(x^{(n)}) \rightarrow_n 0$,

$$\lim_n \sum_{i=0}^{p_n-1} (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}) f(\alpha_i^{(n)}) = \int_a^b f(x)dx.$$

Cet énoncé sera cependant surtout pratique lorsque nous saurons calculer la valeur des intégrales des fonctions intégrables sur I . Pour cela nous avons besoin de la notion de **primitive**. Par exemple, si l'on admet que $\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$, alors

$$\lim_n \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{1}{3}.$$

CONVENTION. Si f est intégrable sur I , on note

$$\int_{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

9.3. Primitives.

DÉFINITION. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Une **primitive de f sur I** est une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $F' = f$ sur $]a, b[$.

PROPOSITION. Deux primitives d'une même fonction diffèrent par une constante.

PREUVE. Si F et G sont des primitives de f sur I , alors $F - G$ est continue sur I , dérivable sur $]a, b[$, et de dérivée nulle. Donc $F - G$ est constante sur I . ■

THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL INTÉGRAL. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f admet une primitive sur I . Celle qui s'annule en a vaut

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt.$$

PREUVE. Soit $x_0 \in I$: si $x \in I$, comme f est bornée, en posant $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, on a

$$|F(x) - F(x_0)| \leq |x - x_0| M,$$

si M est un majorant de $|f|$ sur I . Et donc F est continue.

Si $x_0 \in]a, b[$, et si $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, par continuité de f en x_0 . Et alors si $|x - x_0| < \delta$,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0) - (x - x_0)f(x_0)| &= \left| \int_{\min\{x, x_0\}}^{\max\{x, x_0\}} x(f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\leq \int_{\min\{x, x_0\}}^{\max\{x, x_0\}} |f(t) - f(x_0)| dt \\ &\leq \int_{\min\{x, x_0\}}^{\max\{x, x_0\}} \varepsilon dt \\ &= |x - x_0| \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui permet d'affirmer que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$. ■

Remarque : sous les mêmes hypothèses, si F est une primitive de f et si $x \in I$,

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}).$$

9.4. Primitives usuelles.

Les fonctions usuelles donnent des primitives usuelles... Par exemple, la fonction “ln” est la primitive, qui s’annule en 1, de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$ ($]0, +\infty[$ n’est pas un intervalle fermé borné, mais $]0, +\infty[= \cup_{n \geq 1} [\frac{1}{n}, n]$). Voici une petite liste de primitives de fonctions usuelles, pour lesquelles nous ne précisons pas les bornes d’intégration, mais auxquelles il faut être attentif, lors de leur utilisation !

Fonctions		Primitives	
x^α	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^\alpha}{\alpha+1}$	sur $\mathbb{R}$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$		$\ln x $	sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$e^{\lambda x}$	$\lambda \neq 0$	$\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$	sur $\mathbb{R}$
$\ln x$	$x > 0$	$x \ln x - x$	sur $]0, +\infty[$
$\operatorname{ch} x$		$\operatorname{sh} x$	sur $\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$		$\operatorname{ch} x$	sur $\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$		$\ln(\operatorname{ch} x)$	sur $\mathbb{R}$
$\sin x$		$-\cos x$	sur $\mathbb{R}$
$\cos x$		$\sin x$	sur $\mathbb{R}$
$\tan x$		$-\ln \cos x $	sur $] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$		$\tan x$	sur $] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$a > 0$	$\frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a}$	sur $\mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2 - x^2}$	$a > 0$	$\begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{Argth} \frac{x}{a} & \text{si } x < a; \\ \frac{1}{a} \operatorname{Argth} \frac{a}{x} & \text{si } x > a \end{cases}$	sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm a\}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$a > 0$	$\operatorname{Arcsin} \frac{x}{a}$	sur $] -a, a[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$a > 0$	$\begin{cases} \operatorname{Argch} \frac{x}{a} & \text{sur } [a, +\infty[; \\ -\operatorname{Argch} \left(-\frac{x}{a}\right) & \text{sur }]-\infty, -a] \end{cases}$	sur $\mathbb{R} \setminus] -a, a[$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$	$a > 0$	$\operatorname{Argsh} \frac{x}{a}$	sur $\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sin x}$		$\ln \left \tan \frac{x}{2} \right $	sur $]k\pi, (k+1)\pi[$
$\frac{1}{\cos x}$		$\ln \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $	sur $]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$

9.5. Intégration par parties.

C’est une méthode de calcul de primitive basée sur la formule de dérivation d’un produit :

INTÉGRATION PAR PARTIES.

$$\int u'(t)v(t)dt = uv - \int u(t)v'(t)dt$$

PREUVE. La dérivée de uv est $u'v + uv'$. ■

Exemple : primitiver $\int t^n \ln(t)dt$, $n \geq 1$.

Exemple : primitiver $\int \operatorname{Arctan}(t)dt$ (poser $u'(t) \equiv 1$ et $v(t) = \operatorname{Arctan}(t)$).

9.6. Changement de variables.

CHANGEMENT DE VARIABLES. Soit $u : I \rightarrow J$ une application dérivable bijective à dérivée non nulle d'un intervalle I dans un intervalle J . Soit $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors

$$\boxed{\int f(t)dt = \int f(v(s))v'(s)ds,}$$

autrement dit on peut trouver une primitive de f en trouvant une de $f \circ v \cdot v'$, et réciproquement.

PREUVE. La dérivée de $F \circ v$ est $f \circ v \cdot v'$. ■

Exemple : montrer que $\int \frac{dt}{\sqrt{3+4t-4t^2}} = \frac{1}{2} \text{Arcsin}(x - \frac{1}{2})$.

9.7. Primitive d'une fraction rationnelle.

Par décomposition en éléments simples, on se ramène au calcul des primitives

1) d'un polynôme ;

2) d'éléments simples de la forme $\frac{1}{(x-a)^r}$, $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

3) d'éléments simples de la forme $\frac{ax+b}{(x^2+sx+p)^r}$, avec $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $s^2 - 4p < 0$.

1)

Un polynôme est facile à primitiver;

2)

On a

$$\int \frac{dt}{(t-\alpha)^n} = \begin{cases} -\frac{1}{(n-1)(t-\alpha)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1; \\ \ln |t-\alpha| & \text{sinon.} \end{cases}$$

3)

On écrit d'abord que

$$\frac{ax+b}{(x^2+sx+p)^r} = \frac{a}{2} \frac{2x+s}{(x^2+sx+p)^r} + \frac{b-a\frac{s}{2}}{(x^2+sx+p)^r}.$$

Alors d'une part,

$$\int \frac{2x+s}{(x^2+sx+p)^r} dx = \begin{cases} \frac{-1}{(r-1)(x^2+sx+p)^{r-1}} & \text{si } r \neq 1; \\ \ln |x^2+sx+p| & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

Et d'autre part, par changement de variable,

$$\int \frac{dx}{(x^2+sx+p)^r} = \int \frac{dx}{((x^2+\frac{s}{2})^2+q^2)^r} = \int \frac{dt}{(t^2+q^2)^r}.$$

Reste à calculer cette dernière primitive, ce qui peut se faire

– par récurrence sur r ;

– ou bien par le changement de variables $t = q \tan u$.

Exemple : calculer $\int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^2}$.

9.7. Fractions rationnelles “indirectes”.

Fractions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$ - Règles de Bioche : on cherche à primitiver une fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$.

- + Si $f(-x) = -f(x)$, faire le changement de variable $t = \cos x$.
- + Si $f(-x) = f(x)$, faire le changement de variable $t = \sin x$.
- + Si $f(x + \pi) = f(x)$, faire le changement de variable $t = \tan x$.
- + Sinon, faire le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$, et utiliser les relations

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Fractions rationnelles en e^x , $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$: faire le changement de variable $t = e^x$.

Fractions rationnelles en x et $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m}}$, m entier ≥ 2 : faire le changement de variable $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m}}$.

Fractions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$, $a \neq 0$: la forme canonique $ax^2+bx+c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$ permet de transformer le radical par le changement de variable $t = x + \frac{b}{2a}$

- soit en $\sqrt{t^2 - q^2}$: faire le changement de variable $t = q \cosh u$ ou $-q \cosh u$;
- soit en $\sqrt{t^2 + q^2}$: faire le changement de variable $t = q \sinh u$;
- soit en $\sqrt{q^2 - t^2}$: faire le changement de variable $t = q \sin u$.

9.8. Autres primitives.

• : primitive d'un produit de sinus et cosinus : décomposer l'expression en sommes (linéariser au besoin).

• : primitive d'un polynôme fois une exponentielle $e^{\lambda t}$: intégrer par parties en faisant décroître le degré du polynôme jusqu'à ce qu'il disparaisse.

Annexe : sujets d'examen et devoirs.

UPJV
Année 2000/2001
Faculté des Sciences
DEUG SM - Première Année
UE 2 - Mathématiques
Partiel du 24 Novembre 2000

*Documents de Cours et TD autorisés
Tout autre document interdit
Calculatrices interdites
Les 9 exercices sont indépendants*

Exercice 1.

Soit θ un réel. Linéariser $\cos^6 \theta$.

Exercice 2.

Considérons le nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.

- 1) Déterminer le module et l'argument de z .
- 2) Trouver les racines quatrièmes de z .
- 3) Quels sont les nombres complexes Z tels que $iZ = 1 + i\sqrt{3}$?

Exercice 3.

Parmi les affirmations suivantes, dire lesquelles sont vraies ou fausses.
On justifiera la réponse en démontrant l'affirmation ou en trouvant un contre-exemple.

- 1) Sur $\mathbb{R}$, la dérivée de $x \mapsto |\cos x|$ est $x \mapsto |\sin x|$.
- 2) $\forall z \in \mathbb{C}, \exists ! a \in \mathbb{Q}, \exists ! b \in \mathbb{Q} / z = a + ib$.
- 3) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\lim_{+\infty} f(x) = 4$ entraîne que $\{x > 0 / f(x) < 3\}$ est borné.

Exercice 4.

Calculer, si elle existe, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\sin x}$.

Exercice 5.

Soient f et g deux fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[0, 1]$ et telles que $(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) \leq 0$. Démontrer qu'il existe c dans $[0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 6.

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x + \sin x$.

- 1) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- 2) Calculer $(f^{-1})'(f(x))$ pour tout réel x .

Exercice 7.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

La fonction f est-elle continue en 0 ? dérivable en 0 ?

Exercice 8.

Soit la fonction f définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

- 1) Déterminer les ensembles de définition D et de dérivabilité D' de f . Justifier.
- 2) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- 3) Calculer les limites de f aux bornes de D .

(Indication : il peut être utile de calculer et simplifier l'expression $f(x)(x - \sqrt{x^2 - 1})$).

- 4) Etudier le sens de variation de f . Dresser le tableau de variation.

Exercice 9.

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x) + \operatorname{Arctan}x$.

- 1) Déterminer les ensembles de définition D et de dérivabilité D' de f . Justifier.
- 2) Démontrer que la dérivée de f est nulle. En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout x dans D .
- 3) Tracer le graphe de f .

UPJV, Maths.

SM 1, UE2, 00/01

Devoir 1 - Délai : une semaine!

I : soit z un nombre complexe non nul. Supposons que $z = a + ib$, avec a et b réels. Montrer qu'alors

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

II : montrer que quels que soient les nombres complexes z et z' , on a toujours

$$||z| - |z'||| \leq |z - z'|.$$

Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

III : linéariser $\cos^5 \theta$ et $\sin^4 \theta$.

Devoir2 - Délai : une semaine!

I : la proposition suivante est-elle vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / |y| < \eta \Rightarrow |xy| < \varepsilon ??$$

II : qu'en est-il de celle-ci :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| < -1 \Rightarrow x = 2 ??$$

III : et celle-là :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, 3 \text{ divise } n \Rightarrow 6 \text{ divise } n! ??$$

IV : déterminer les limites suivantes :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\log(2x)}; \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^3+x+1}}{|x-1|}. \end{cases}$$

UPJV, Maths.

SM 1, UE2, 00/01

Devoir3 - Délai : une semaine!

I : pour $n \geq 1$, soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n + 2x^2 + x - 1.$$

a) : montrer que la fonction f_n est strictement croissante et qu'il existe un unique $x_n \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

b) : montrer que $f_n \geq f_{n+1}$ et en déduire que la suite (x_n) est croissante, et convergente.

c) : montrer que $\lim_n x_n^n = 0$. Calculer la limite de la suite (x_n) .

II : les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Pour chacune d'elles ou bien écrire une démonstration, ou bien trouver un contre-exemple :

Affirmation 1) : si $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction strictement décroissante, alors $\lim_{+\infty} f(x) = 0$.

Affirmation 2) : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et si $x \in [a, b] \Rightarrow f(x) \neq 0$, alors il existe $m > 0$ tel qu'ou bien pour chaque x , $f(x) \geq m$, ou bien, pour chaque x , $f(x) \leq -m$.

Affirmation 3) : il n'existe pas d'application continue bijective de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$.

Devoir 1 - Délai : deux semaines

I : on sait que quels que soient les nombres complexes z et z' , on a toujours

$$||z| - |z'||| \leq |z - z'|.$$

Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Écrire les ensembles suivants :

$$\begin{cases} \mathcal{D} = \{\text{l'ensemble des points } M \text{ d'affixes } z \text{ telles que } (z - i) / e^{\frac{2i\pi}{3}} \in]0, +\infty[\}; \\ \mathcal{C} = \{\text{l'ensemble des points d'affixes } z \text{ telles que } |z - 1 - i| < 1 \}. \end{cases}$$

II : linéariser $\cos^5 \theta$ et $\sin^4 \theta$.

III : la proposition suivante est-elle vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / |y| < \eta \Rightarrow |xy| < \varepsilon ??$$

En écrire la négation.

IV : qu'en est-il de celle-ci :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| < -1 \Rightarrow x = 2 ??$$

V : et celle-là :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, 3 \text{ divise } n \Rightarrow 6 \text{ divise } n! ??$$

VI : déterminer les limites suivantes :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\log(2x)}; \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^3+x+1}}{|x-1|}. \end{cases}$$

UPJV, Maths.

SM 1, UE2, 01/02

Devoir2 - Délai : deux semaines au plus!**I** : pour $n \geq 1$, soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n + 2x^2 + x - 1.$$

a) : montrer que la fonction f_n est strictement croissante et qu'il existe un unique $x_n \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

b) : montrer que $f_n \geq f_{n+1}$ et en déduire que la suite (x_n) est croissante, et convergente.

c) : montrer que $\lim_n x_n^n = 0$. Calculer la limite de la suite (x_n) .

II : les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Pour chacune d'elles, ou bien écrire une démonstration, ou bien trouver un contre-exemple :

Affirmation 1) : si $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction strictement décroissante, alors $\lim_{+\infty} f(x) = 0$.

Affirmation 2) : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et si $x \in [a, b] \Rightarrow f(x) \neq 0$, alors il existe $m > 0$ tel qu'ou bien pour chaque x , $f(x) \geq m$, ou bien, pour chaque x , $f(x) \leq -m$.

Affirmation 3) : il n'existe pas d'application continue bijective de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$.

III :

1) : diviser $P(X) = 2X^4 - X^3 + X^2 - 3$ par $Q(X) = X^5$.

2) : diviser $P(X) = X^6 + X^5 + x^3$ par $Q(X) = X^3 - 1$.

3) : les polynômes $P(X) = X^5 + X^3 - 2$ et $Q(X) = (X + 1)^2$ sont ils premiers entre eux ? Si non, déterminer leur PGCD.

IV : décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1) : $F(X) = \frac{X^3+2}{(X-1)^2(X^4+1)}.$

2) : $G(X) = \frac{X^4}{X^3-X^2+X-1}.$