# Équations différentielles

Pr. Lacroix

SEATECH
Université de Toulon

15 avril 2014

## Définition

*Une* **équation différentielle (ED) du premier ordre** *est une équation de la forme* $\boxed{F(x, y, y') = 0}$, *parfois de la forme* $\boxed{y' = f(x, y)}$, *où* $y$ *est une fonction dérivable de la variable rélle* $x$, *et* $y'$ *sa dérivée.*
*Une solution d'une telle équation sur un intervalle ouvert* $]a, b[$ *est une fonction dérivable* $y = h(x)$ *qui la satisfait.*
*Parfois la solution de l'équation différentielle se présente sous une forme* **implicite** $H(x, y) = 0$, *en contraste de la forme* **explicite** $y = h(x)$.

## Exemple

- $y = x^2$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'ED $xy' = 2y$.
- $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est une solution implicite sur $]-1, 1[$ de $yy' = -x$.

On cherche parfois une solution de l'ED du premier ordre satisfaisant une **condition initiale** du type $y(\alpha) = \beta$ ou $y'(\alpha) = \beta$. Sans ajout d'une condition initiale une ED du premier ordre a le plus souvent une infinité de solutions.
Considérons l'équation $\boxed{y' = f(x, y)}$. Les courbes d'équation $f(x, y) = k$ sont appelées les **isoclines**. Elles permettent de tracer de fa c con approximative les solutions de l'ED (les tracer pour l'exmple $y' = xy$).

## Définition

*Une ED est dite à variables* **séparables** *si elle peut s'écrire sous la forme* $\boxed{g(y)y' = f(x)}$, *ce qui permet de la résumer sous la forme* $\boxed{f(x)dx = g(y)dy}$ *en adoptant une convention de notation* $y' = dy/dx$.

La stratégie pour résoudre ces équations consiste alors à intégrer $\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$.

## Exemple

- $9yy' + 4x = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = c$ : les solutions implicites sont des ellipses.
- $y' = 1 + y^2 \Rightarrow y = \tan(x + c)$.
- $y' = ky \Rightarrow y = ce^{kx}$.
- $y' = -2xy \Rightarrow y = ce^{-x^2}$ (courbes de Bell).

- si l'ED est de la forme $y' = g(y/x)$, poser $u = y/x \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u \Rightarrow \frac{du}{g(u)-u} = \frac{dx}{x}$.
- poser parfois $v = ay + bx + k$ (ex : $(2x - 4y + 5)y' + x - 2y + 3 = 0$ : poser $v = x - 2y$.

Il existe de nombreuses autres alternatives pour transformer une ED en ED à variables éparables.

- **Datation au carbone 14** ${}_6C^{14}$ : on compare le taux de carbone d'un fossile avec celui de l'atmosphère. La demi-vie du carbone 14 est de 5730 ans. Le modèle pour la décroissance du taux de ${}_6C^{14}$ est $y(t) = y_0 e^{kt}$, et $y_0 e^{k5730} = \frac{1}{2} y_0$. On en déduit $k = -0.000121$.
- **Loi de refroidissement de Newton** : le taux de refroidissement d'un corps est proportionnel à la différence entre sa température $T$ et la température environnante $T_E$. Supposons que l'on coupe le chauffage d'une maison à 20h et que l'on observe une baisse de température de $2^\circ C$, $T$ passant de $20^\circ C$ à $18^\circ C$ en 2h. Supposons que la température extérieure soit de $0^\circ C$. Quelle température fera-t-il au petit matin à 6h ?

- **Vitesse de satellisation** : la loi de Newton stipule que $a(r) = -g\frac{R^2}{r^2}$ où $R$ est le rayon terrestre et $a(r)$ est l'accélération due au champ gravitationnel que subit un objet placé à la distance $r$ du centre de la terre. On pose $a = dv/dt = (dv/dr)(dr/dt)$, et l'on obtient $v^2 = 2g\frac{R^2}{r} + v_0^2 - 2gR$, où $v_0$ désigne la vitesse initiale de l'objet à l'altitude $R$. Ainsi si $v_0 = \sqrt{2gR}$ et la trajectoire radiale, alors l'objet s'échappe du champ gravitationnel terrestre.

La fonction à valeurs réelles $u(x, y)$ ayant des dérivées partielles, sa différentielle s'écrit en langage de physicien

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

L'idée ici est d'exploiter la remarque, que si $u = c$, alors $du = 0$, pour résoudre certaines ED.

## Proposition

*Une ED de la forme* $\boxed{M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0}$ *est dite* **exacte** *si il existe u dérivable telle que* $M = \partial u/\partial x$ *et* $N = \partial u/\partial y$. *Dans ce cas ses solutions sont de la forme* $u(x, y) = c$.

*Si M et N ont des dérivées partielles qui sont continues, alors la forme est exacte si et seulement si* $\boxed{\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}}$.

Pour résoudre une ED exacte, on peut intégrer $M$ à $y$ constant : $u = \int M dx + k(y)$, puis dériver partiellement en $y$, pour obtenir $\partial(\int M dx)/\partial y + dk/dy = N$, et donc $k(y) = \int N dy - - \int(\int \partial M/\partial y dx) dy$. On peut procéder en échangeant les rôles de $x$ et de $y$.

**Exemple**

- Résoudre $(x^3 + 3xy^2)dx + (3x^2y + y^3)dy = 0$.
- Résoudre $(\sin x \cosh y)dx - (\cos x \sinh y)dy = 0$ avec $y(0) = 3$.

Il se peut que l'ED $Pdx + Qdy = 0$ ne soit pas exacte, et qu'en multipliant par un facteur $F(x, y)$, $FPdx + FQdy = 0$ devienne exacte (ex : $-ydx + xdy = 0$ et $F(x, y) = 1/x^2$. On appelle un tel facteur $F$ un **facteur intégrant**. Un facteur intégrant doit donc satisfaire (les indices indiquent la dérivation partielle)

$$F_y P + FP_y = F_x Q + FQ_x. (\star)$$

Pour le rechercher, on se restreint souvent à $F = F(x)$ ou $F = F(y)$.

### Théorème

- *Si* $F_xQ + FQ_x$ *ne dépend que de* $x$*, alors* $F_x/F = (P_y - Q_x)/Q = R$*, et* $F(x) = exp(\int R(x)dx)$ *est un facteur intégrant.*
- *Si* $F_xQ + FQ_x$ *ne dépend que de* $y$*, alors* $F(y) = exp(\int \tilde{R}(y)dy)$ *est un facteur intégrant,* $\tilde{R} = (Q_x - P_y)/P$.

### Exemple

Soit $2\sin(y^2)dx + xy\cos(y^2)dy = 0$ avec condition initiale $y(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Une ED du premier ordre est dite **linéaire** s'il est possible de la réécrire sous la forme $\boxed{y' + p(x)y = r(x)}$. Elle est dite **homogène** si $r(x) = 0$. La solution générale d'une ED linéaire homogène s'écrit

$$y(x) = ce^{-\int p(x)dx}.$$

La solution générale d'une ED linéaire non homogène s'écrit alors

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx} r(x)dx + c\right).$$

L'ED de Bernoulli est de la forme $\boxed{y' + p(x)y = g(x)y^a}$. Si $a \notin \{0, 1\}$, elle n'est pas linéaire. On pose alors $u = y^{1-a}$. On obtient $u' = (1-a)y^{-a}y'$ et par substitutions successives on peut réécrire l'ED sous la forme

$$u' + (1-a)p(x)u = (1-a)g(x).$$

**Exemple**

L'équation de Verhulst $y' - Ay = -By^2$, $A, B > 0$ (modèle de croissance de population humaine, 1838). Pour $B = 0$, on appelle sa solution la loi de Malthus. Sinon, on l'appelle l'équation logistique.

Nous présentons maintenant des conditions pour l'existence et l'unicité de la solution d'une ED du premier ordre avec condition initiale :

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0.$$

Pour illustrer notre propos,

- $|y'| + |y| = 0$, $y(0) = 1$ : pas de solution ;
- $y' = x$, $y(0) = 1$ : une seule solution ;
- $xy' = y - 1$, $y(0) = 1$ : une infinité de solutions.

**Théorème (de Picard)**

*Si* $f(x, y)$ *est continue en tout point d'un rectangle* $R = \{|x - x_0| < a,\ |y - y_0| < b\}$, *et bornée sur* $R$, *alors l'ED* $y' = f(x, y)$ *a une solution sur* $R$ *avec condition initiale* $y(x_0) = y_0$. *Cette solution est définie pour tout* $|x - x_0| < \alpha$ *où* $\alpha = \min\{a, b/K\}$, *avec* $|f(x, y)| \leq K$.

*Si de plus* $\partial f/\partial x$ *et* $\partial f/\partial y$ *sont continues et bornées sur* $R$, *alors la solution est unique.*

Sous les hypothèses d'unicité dans le théorème de Picard, nous pouvons écrire par intégration

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt + y_0.$$

L'idée pour résoudre cette équation intégrale par itération est de poser

$$\begin{cases} y_0 & = & y(x_0); \\ y_{n+1}(x) & = & y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt, \ n \geq 0. \end{cases}$$

**Théorème (Convergence de la méthode itérative de Picard)**

*Sous les hypothèses du théorème de Picard, la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers l'unique solution $y$ de condition initiale $y(x_0) = y_0$.*

**Exemple**

- Soit $y' = 1 + y^2$ avec CI : $y(0) = 0$. Trouver les premiers termes $y_1, y_2, y_3$ par la méthode de Picard.
- Idem avec $y' = y$ et $y(0) = 1$.

Une ED **linéaire d'ordre deux** est de la forme

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)}.$$

Elle est **homogène** si $r(x) = 0$.

**Théorème (Superposition)**

*L'ensemble des solutions d'une ED linéaire homogène sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est un espace vectoriel, autrement dit, toute combinaison linéaire de solutions en est encore une.*

La question des **conditions initiales** varie quelque peu par rapport au cas des ED d'ordre 1 : ici en général deux conditions initiales sont requises de la forme

$$y(x_0) = k_0, \; y'(x_0) = k_1.$$

Une **base** de solutions est la donnée de deux solutions $y_1$ et $y_2$ linéairement indépendantes. En général l'ensemble des solutions de l'ED linéaire homogène constitue un ev de dimension 2. Ainsi la donnée d'une base permet de décrire toutes les solutions.

### Exemple

- $y'' + y = 0$ : trouver une base.
- $y'' - y = 0$ : idem.

Si l'on connaît une solution $y_1$, on peut chercher $y_2$ en posant $y_2 = uy_1$. Alors on vérifie que

$$u'' + u' \frac{2y_1' + py_1}{y_1} = 0,$$

et en posant $U = u'$, il vient $U' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right) U = 0$. On en déduit

$$U = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} \Rightarrow y_2 = y_1 \int U dx.$$

**Exemple**

Considérer $x^2 y`` - xy' + y = 0$ et remarquer que $y_1 = x$ est solution.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$\boxed{y'' + ay' + by = 0} \Rightarrow \text{Éq}^{tn} \text{ caractéristique : } \boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}.$$

Soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les racines de l'équation caractéristique :

- $a^2 - 4b > 0$ : la solution générale est $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$.
- $a^2 - 4b = 0$ : racine double $\lambda_1 = -\frac{a}{2}$, $y = (c_1 + c_2 x)e^{-ax/2}$.
- $a^2 - 4b < 0$ : $\lambda_j = -\frac{a}{2} \pm i\omega$, $y = e^{-ax/2}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$.

Une masse $m$ est suspendue à un ressort vertical de raideur $k$. La force gravitationnelle est $my''$, la force de traction du ressort est $-ky$(loi de Hooke). Le bilan des forces se traduit par

$$my'' + ky = 0$$

en l'absence de frottements. La solution générale du mouvement est $y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
Si on rajoute un frottement, soit une force $-cy'$, l'équation du mouvement devient

$$my'' + cy' + ky = 0,$$

On distingue selon que :

- $c^2 > 4mk$ : suramortissement.
- $c^2 = 4mk$ : amortissement critique : un passage par zéro.
- $c^2 < 4mk$ : amortissement sous critique : oscillations d'amplitudes se réduisant.

L'équation d'**Euler-Cauchy** est

$$x^2y'' + axy' + by = 0.$$

En essayant $y = x^m$, on trouve que $m$ doit satisfaire $m^2 + (a-1)m + b = 0$.

- Racines réelles distinctes : $y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$.
- Racine double $\frac{1}{2}(1-a)$ : $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{(1-a)/2}$.
- Racines complexes conjuguées $m_j = \mu \pm i\nu$ : $y = x^{\mu}(A\cos(\nu \ln x) + B\sin(\nu \ln x))$.

Si l'on revient à l'ED homogène linéaire du second ordre : soient $y_1$ et $y_2$ deux solutions de l'ED sur un intervalle $I$. On note $\boxed{W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'}$ leur **Wronskien**.

**Théorème**

*Si $p$ et $q$ sont continues sur un intervalle $I$, alors $y_1$ et $y_2$ sont linéairement indépendantes si et seulement si leur Wronskien ne s'annule jamais sur $I$ si et seulement si leur Wronskien n'est pas identiquement nul sur $I$.*
*Ainsi elles sont linéairement indépendantes si et seulement si en un point $x_0 \in I$, $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$.*
*Toute famille de deux solutions linéairement indépendantes est alors une base de solutions de l'ED, et une telle famille existe.*

Pour l'ED $y'' + p(x)y' + q(x) = r(x)$, les solutions de l'ED homogène associée permettent de trouver les solutions générales :

**Théorème**

*Si $p$, $q$ et $r$ sont continues sur $I$, une solution générale de l'ED non homogène est somme d'une solution particulière de l'ED non homogène et de la solution générale de l'ED homogène associée.*

Ainsi la difficulté supplémentaire pour résoudre l'ED non homogène réside dans le fait de trouver une solution particulière.

On se place dans le cas de $y'' + ay' + by = r(x)$.

| Terme de $r(x)$ | Choix de $y_p$ |
|---|---|
| $ke^{\gamma x}$ | $Ce^{\gamma x}$ |
| $kx^n$ | $K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \ldots + K_0$ |
| $k\cos\omega x$ ou $k\sin\omega x$ | $K\cos\omega x + L\sin\omega x$ |
| $ke^{\gamma x}(\alpha\cos\omega x + \beta\sin\omega x)$ | $e^{\gamma x}(K\cos\omega x + L\sin\omega x)$ |

- **Règle de base** : si $r(x)$ est l'un des termes de la colonne de gauche, chercher $y_p$ sous la forme de la colonne de droite. Il faut alors résoudre une équation portant sur les constantes.
- **Règle de modification** : si le choix de $y_p$ correspond à une solution de l'ED homogène associée, multiplier par $x$ ou $x^2$ selon que la solution est simple ou correspond à une racine double.
- **Superposition** : si $r(x)$ est une combinaison linéaire de termes de la colonne de gauche, choisir $y_p$ comme CL correspondante des termes de la colonne de droite.

## Exemple

- $y'' + 4y = 8x^2$.
- $y'' - 3y' + 2y = e^x$.
- $y'' + 2y' + 5y = 1.25e^{0.5x} + 40\cos 4x,\ y(0) = 0.2,$ $y'(0) = 60.1$.

Ici on se place dans le cadre plus général de

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)}$$

avec $p, q, r$ continues sur $I$. On suppose connue une base $\{y_1, y_2\}$ de solutions de l'ED homogène associée. Alors

$$\boxed{y_p = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx}.$$

**Exemple**

- $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$.
- $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 21/x^4$.

On reprend l'oscillateur amorti et on rajoute un forçage $F_0 \cos(\omega t) = r(t)$. L'ED devient

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos(\omega t).$$

On cherche $y_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$. On trouve

$$a = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2} \text{ et } b = \frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}.$$

En l'absence de frottement ($c = 0$), $a \to \infty$ si $\omega \to \omega_0$ : c'est le phénomène de résonnance.

Une ED d'ordre $n$ s'écrit

$$\boxed{F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0}.$$

Elle est linéaire d'ordre $n$ si elle peut s'écrire

$$\boxed{y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)}.$$

Elle est alors homogène si $r(x) = 0$.
Les conditions initiales s'écrivent alors souvent

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

## Théorème

*Si les $p_i$ et $r$ sont continues sur $I$, alors la solution générale de l'ED est somme d'une solution particulière $y_p$ et de la solution générale de l'ED homogène associée.*
*Le Wronskien associé à une famille $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de solutions de l'ED homogène est défini par*

$$W(y_1, \ldots, y_n) = det((y_j^{(i-1)})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

*Une telle famille est libre ssi $W$ ne s'annule jamais sur $I$ ssi $W$ n'est pas identiquement nul.*
*Il existe une base de solutions de l'ED homogène associée.*

On considère $\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0}$. Alors l'équation caractéristique associée est

$$\boxed{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + A_1\lambda + a_0 = 0}.$$

- Racines réelles distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ : $\{y_j(x) = e^{\lambda_j x} : 1 \leq j \leq n\}$ est une base.
- Racines distinctes mais une racine complexe : alors la conjuguée est racine, donc $\lambda = \gamma \pm i\omega$ sont racines et on prend dans la base $y_1(x) = e^{\gamma x}\cos\omega x$ et $y_2(x) = e^{\gamma x}\sin\omega x$.
- Si une racine de multiplicité $m$ (réelle ou avec sa conjuguée) : multiplier successivement par $1, x, \ldots, x^{m-1}$ et ajouter à la base.

**Exemple**

- $y^{(4)} - 2y'' + y = 0.$
- $y^{(3)} - 2y'' - y' + y = 0.$

Pour l'ED $\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = r(x)}$ avec $r(x)$ continue, on peut chercher à résoudre en cherchant $r$ de forme particulière comme on l'a fait dans le cas des équations de degré 2.

Pour $\boxed{y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)}$ on détermine d'abord une base de l'ED homogène associée, $\{y_1, \ldots, y_n\}$, puis on obtient

$$\boxed{y_p(x) = y_1(x)\int \frac{W_1(x)}{W(x)}r(x)dx + \ldots + y_n(x)\int \frac{W_n(x)}{W(x)}r(x)dx},$$

où $W = W(y_1, \ldots, y_n)$ et $W_j(x)$ est obtenu en prenant le déterminant de la matrice du Wronskien où l'on a remplacé la $j^{\text{ième}}$ colonne par $(0, \ldots, 0, 1)^t$.

Un Système d'Équations Différentielles (SED) s'écrit

$$\boxed{y' = f(t, y)}$$

où $y = (y_1, \ldots, y_n)$ et $y' = (y'_1, \ldots, y'_n)$, et $t \in I$ un intervalle, et $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

**Théorème (Existence et unicité de la solution du SED)**

*Supposons que les $f_i$ soient continues et aient des dérivées partielles continues sur un ouvert contenant le point $(t_0, K_1, \ldots, K_n)$. Alors le SED a une solution unique sur un intervalle $]x_0 \pm \alpha[$ satisfaisant*

$$y_i(t_0) = K_i, \ 1 \leq i \leq n.$$

Le SED est dit **linéaire** s'il s'écrit

$$\boxed{y' = Ay + g}$$

où $A = A(t)$ est carrée d'ordre $n$ et $g : I \to \mathbb{R}^n$. Il est dit **homogène** si $g = 0$.
On appelle base de solutions du SED homogène toute famille $\{{}_1y, \ldots, {}_ny\}$ de solutions dont le **Wronskien** $W({}_1y, \ldots, {}_ny) = det(({}_iy_j)_{1 \leq i,j \leq n})$ ne s'annule pas ou bien sur $I$ ou bien en un seul point de $I$ (ce qui est équivalent).
On appelle parfois $Y = ({}_iy_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ la **matrice fondamentale** du SED homogène.
*Si le Wronskien ne s'annule pas alors toute solution du SED homogène s'exprime comme combinaison linéaire des* ${}_iy$*.*

## Théorème (Cas linéaire constant)

*Si la matrice du SED linéaire homogène est constante, et si elle admet une base de vecteurs propres* $\{_1x, \ldots, _nx\}$ *associés aux valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*, alors la solution générale s'écrit*

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i \, {}_ix e^{\lambda_i t}.$$

*La matrice est diagonalisable si par exemple elle est symétrique, sinon si les sous espaces propres associés à ses valeurs propres sont de dimensions égales aux multiplicités des valeurs propres.*
*Si la matrice a un sep de dimension inférieure à la multiplicté, on cherche à compléter la base de solutions en prenant des* ${}_ixP(t)e^{\lambda_i t} + ue^{\lambda_i t}$ *avec* $P$ *un polynôme en* $t$ *de degré* $\leq$ *multiplicité* $-$ *dimension, et* $u$ *un vecteur indéterminé.*

D'abord nous présentons la méthode de **variation de la constante**.

On se donne un SED $\boxed{y' = A(t)y + g(t)}$ et on suppose que $\{_1y, \ldots, _ny\}$ est une base du SED homogène associé. On recherche une solution particulière $_py$ du SED non homogène sous la forme

$$_py(t) = Y(t)u(t)$$

où $Y$ est la matrice fondamentale et $u$ un vecteur variable. Après écriture de l'équation et simplification, on obtient

$$\boxed{u(t) = \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)g(s)ds + c \Rightarrow {_p}y(t) = Y(t)\left(\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)g(s)ds + c\right)}$$

Une méthode alternative est celle de le **diagonalisation** si la matrice $A$ est constante.
On suppose ici que $A$ admet une base de vp $\{_1x, \ldots, _nx\}$. Alors si $D = Diag(\lambda_i)$, $D = X^{-1}AX$ où $X$ est la matrice de colonnes $_ix$.
On pose alors $z = X^{-1}y$ et $h = X^{-1}g$. Le SED s'écrit alors

$$\boxed{z' = Dz + h \Rightarrow z_j' = \lambda_j z_j + h_j}$$

qui se résoud en $z_j(t) = c_j e^{\lambda_j t} + e^{\lambda_j t} \int e^{-\lambda_j t} h_j(t) dt$.
On conclut par $\boxed{Y = Xz}$.