ISITV, Première Année **APPROX 2012**

I : intégration numérique.

1) Les poids associés α_i, $i = 1, 2, 3$, satisfont au système :

$$\begin{cases} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & \int_0^5 dt & = & 5 & = \frac{5}{12}6 \\ \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & 3\alpha_3 & = & \int_0^5 tdt & = & 25/2 & = \frac{5}{12}15 \\ \alpha_1 & + & 4\alpha_2 & + & 9\alpha_3 & = & \int_0^5 t^2dt & = & 125/3 & = \frac{5}{12}50 \end{cases}$$

Notons M la matrice du système : par un calcul standard, on a ($M^{-1} = {}^t\!ComM/det(M)$)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow det(M) = 2 \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

dont on déduit que

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \frac{5}{12}M^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 50 \end{pmatrix} = \frac{5}{12}\begin{pmatrix} 11 \\ -16 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

2) Son ordre vaut au moins 3, et au plus 3 si la formule est inexacte pour $t \mapsto t^3$: or

$$\int_0^5 t^3dt = \frac{625}{4} \neq \frac{5}{12}(11 + (-16) \times 8 + 17 \times 27) = \frac{5 \times 171}{6}.$$

Donc la formule est d'ordre 3.

3) Assez bêtement, $\int_0^5 e^x dx \equiv \frac{5}{12}(e - 16 \times e^2 + 17 \times e^3)$.

II : transformée de Fourier.

1) La fonction est Lebesgue intégrable sur la droite donc a une transformée de Fourier.

Si $u = 0$, $\hat{f}(0) = \int_0^1 xdx = 1/2$. Si $u \neq 0$, on va intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \hat{f}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi ux}x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)dx = \int_0^1 e^{-2i\pi ux}xdx \\ &= \left[-\frac{1}{2i\pi u}xe^{-2i\pi ux} + \frac{1}{4\pi^2u^2}e^{-2i\pi ux}\right]_0^1 \\ &= -\frac{e^{-2i\pi u}}{2i\pi u} + \frac{1}{4\pi^2u^2}(e^{-2i\pi u} - 1) \end{aligned}$$

2) La fonction est Lebesgue intégrable sur la droite donc a une transformée de Fourier.

Pour le calcul de $\hat{g}$, on observe que

$$\hat{g}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi ux}e^{2i\pi x}}{1 + x^4}dx.$$

On va donc calculer la transformée de Fourier de g par la méthode des résidus. On pose

$$h(z) = \frac{e^{-2i\pi z(u-1)}}{1 + z^4}.$$

Le numérateur de h est holomorphe dans le plan (fonction entière) et ne s'y annule jamais). Les pôles de h sont donc les zéros de $1 + z^4$, soient

$$z_k = e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2})}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Ils sont donc simples. Et le théorème des résidus, pour les intégrales du troisième type ici, nous indique que

$$\hat{g}(u) = 2i\pi(Res(h, z_0) + Res(h, z_1)).$$

On a par ailleurs $z^4 + 1 = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, et donc

$$Res(h, z_0) = \frac{e^{-2i\pi z_0(u-1)}}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)(z_0 - z_3)}, \quad Res(h, z_1) = \frac{e^{-2i\pi z_1(u-1)}}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}.$$

On observe en plaçant les z_i sur un cercle trigonométrique que $z_0 - z_1 = \sqrt{2}$, $z_0 - z_2 = 2e^{i\pi/4}$, $z_0 - z_3 = i\sqrt{2}$. De même, on constate que $z_1 - z_0 = -\sqrt{2}$, $z_1 - z_2 = i\sqrt{2}$, $z_1 - z_3 = 2e^{3i\pi/4}$. Par ailleurs on exploite le fait que $e^{i\pi/4} = (1 + i)/\sqrt{2}$, et $e^{3i\pi/4} = (-1 + i)/\sqrt{2} = ie^{i\pi/4}$. Il vient en posant $\alpha = \pi\sqrt{2}(u - 1)$,

$$Res(h, z_0) = \frac{e^{\alpha}e^{-i\alpha}}{16e^{i\pi/4}}, \; Res(h, z_1) = \frac{e^{\alpha}e^{i\alpha}}{16e^{i\pi/4}}.$$

Un petit calcul de simplification conduit à

$$\hat{g}(u) = 2i\pi(Res(h, z_0) + Res(h, z_1)) = \frac{1}{8}(1 - i)\sqrt{2}\pi e^{\alpha} \cos\alpha.$$

III : DSF.

1) En fait $f(x) = \cos(x)$ sur $[0, \pi/2]$, et $f(x) = -\cos(x)$ sur $[-\pi/2, 0[$. Ensuite on prolonge f par π-périodicité à la droite.

2) f étant impaire elle a un DSF en sin - cos qui ne présente pas de termes en cos. Sinon on peut calculer directement ses coefficients de Fourier. Posons $\omega = 2\pi/T = 2$ puisque la période ici est π. Alors si $\varepsilon(t)$ désigne le signe de t (± 1), en écrivant $\cos(t) = (e^{it} + e^{-it})/2$,

$$c_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon(t)\cos(t)e^{-2ikt}dt = \frac{1}{2\pi}(w_k(\frac{\pi}{2}) - 2w_k(0) + w_k(-\frac{\pi}{2})),$$

où

$$w_k(t) = \frac{e^{i(1-2k)t}}{i(1 - 2k)} - \frac{e^{-i(1+2k)t}}{i(1 + 2k)}.$$

Il s'ensuit que

$$c_k(f) = \frac{1}{2i\pi}(\frac{2\cos((1 - 2k)\frac{\pi}{2})}{1 - 2k} - \frac{2\cos((1 + 2k)\frac{\pi}{2})}{1 + 2k} - \frac{8k}{1 - 4k^2}) = \frac{4ik}{\pi(1 - 4k^2)}.$$

3) f est continue partout sauf en $\pi\mathbb{Z}$, et est dérivable par morceaux, admet partout une limite à gauche et à droite : donc son DSF converge partout vers f sauf en $k\pi$ où il converge vers $(f(0^-) + f(0^+))/2 = 0$.