Séries entières, Sturm-Liouville, et Laplace

Pr. Lacroix

SEATECH
Université de Toulon

15 avril 2014

1 Séries entières
- Définitions
- Rayon de convergence
- Développement en SE
- Opérations

2 Sturm-Liouville
- ED linéaire ordre 2
- Équation de Legendre
- Frobenius
- Bessel
- Sturm-Liouville
- Orthogonalité
- Bases orthogonales

3 Laplace
- Définitions
- Dérivation
- ED
- Primitivation
- Heaviside
- Dérivation - Intégration
- Convolution
- Formulaires
- Formulaires

Définition

- *Une* **série entière** *est un expression formelle du type* $S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$. *On dit qu'elle est à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *si* $a_i \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *La variable* X *peut être sujette à prendre ses valeurs dans différents ensembles :* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *mais aussi* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *l'espace vectoriel des matrices carrées d'odre* n *sur* $\mathbb{C}$*....*
- *Lorsque la variable formelle est interprétée dans un espace donné survient la question de la* **convergence** *de cette série dans cet espace. Ce qui suppose que l'espace en question permet d'aborder la notion de convergence. En général il sera muni d'une distance déduite d'une norme, elle-même parfois déduite d'un produit scalaire.*
- *On appelle* $n^{\text{ième}}$ *somme partielle de la série la somme formelle* $S_n(X) = \sum_{1\leq i\leq n} a_i X^i$.

Définition (Convergence)

Selon l'espace dans lequel la variable formelle varie, on dira que la série formelle converge en X_0 ssi

$$\lim_{n\to\infty} S_n(X_0) = S(X_0).$$

En général l'espace dans lequel X varie (E) sera un K- espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni d'une norme $\| \ \|$: $E \to \mathbb{R}^+$ telle que

$$\begin{cases} \| X \| = 0 & \Rightarrow & X = 0; \\ \| X + Y \| & \leq & \| X \| + \| Y \|; \\ \| \lambda X \| & = & |\lambda| \, \| X \| . \end{cases}$$

*On parle alors d'un K-**espace vectoriel normé** (K-evn).*

Définition (Espace de Banach)

- *Une* **suite de Cauchy** *dans un K-evn est une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0/(p, q \geq n_0) \Rightarrow (\| u_p - u_q \| \leq \varepsilon).$$

- *Un espace dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit* **complet**.
- *Un* **espace de Banach** *est un K-evn complet.*

Exemple

- $E = \mathbb{R}^n$, $\| x \| = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ est une norme pour chaque $p \geq 1$;
- $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\| A \| = \max |A_{i,j}|$ ou $\max_i(\sum_j |A_{i,j}|)$ sont des normes.
- les deux $\mathbb{C}$-evn précédents sont des Banach.

Définition (Hilbert)

- *Un espace* **préhilbertien** *est un K-ev sur lequel une forme sésquilinéaire définie positive est donnée, à savoir $b : E \times E \to K$, telle que*

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall u, v \in E,\ b(u,v) = \overline{b(v,u)}; \\ \forall u \in E,\ b(\dot{,}u) : E \to K \ \textit{est linéaire}; \\ \forall u \in E,\ b(u,u) \geq 0; \\ b(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0. \end{array} \right.$$

- *On appelle $b(u,v)$ le* **produit scalaire** *de u par v, on le note généralement $< u, v >$. La* **norme déduite** *est définie par*

$$\| u \| = \sqrt{< u, u >}.$$

- *Le K-evn E est dit* **Hilbertien**, *ou* **de Hilbert**, *si c'est un Banach muni d'une norme déduite d'un produit scalaire.*

Exemple

- Cas particulier 1 : $E = \mathbb{C}^n$, $< x, y >= \sum_i x_i \bar{y}_i$. C'est un Hilbert sur $\mathbb{R}$.
- Cas particulier 2 : $E = \{(a_n)_{n\geq 0} / \sum_{n\geq 0} a_n^2 < +\infty\}$: on pose

  $$< (a_n), (b_n) >= \sum_n a_n \bar{b}_n$$

  et on obtient un Hilbert (noté $\ell_2(\mathbb{N})$).
- Cas général : si μ est une mesure positive, on note $f \sim g$ si $\mu(\{f \neq g\}) = 0$. C'est une relation d'équivalence, on note $\tilde{f}$ la classe de f. Pour $p \geq 1$, on note

  $$L^p(\mu) = \{\tilde{f} : f \in \mathcal{L}^p(\mu)\}$$

  l'espace quotient associé à $\mathcal{L}^p(\mu)$. Muni de $\| \tilde{f} \|_p := (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$, c'est un Banach, et un Hilbert si $p = 2$.

Définition

Une algèbre de Banach est un espace de Banach muni d'un produit interne $\star : E \times E \to E$ *tel que* $\| u \star v \| \leq \| u \| \| v \|$. *Elle est dite unitaire si il existe* $e \in E$ *tel que* $e \star u = u \star e = u, \forall u \in E$.

Exemple

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni d'une norme appropriée ($\| A \| = \sup_{\|x\|=1} \| Ax \|$) est une algèbre de Banach pour le produit des matrices, unitaire.
- $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ bien entendu.
- $L^1(\mu)$ pour le produit de convolution.

Définition (Rayon de convergence)

Si la variable X de la série entière $S(X)$ varie dans une algèbre de Banach E, et si pour un certain $\rho \geq 0$,

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| \rho^n < +\infty,$$

alors on montre facilement que pour tout u tel que $\| u \| \leq \rho$ la suite des sommes partielles $(S_n(u))$ est de Cauchy, et donc converge.
On appelle **rayon de convergence** *de la série S le nombre réel positif ou infini défini par*

$$R(S) = \sup\{\rho \geq 0 : \sum_n |a_n| \rho^n < +\infty\}.$$

Proposition (Expressions du rayon de convergence)

Lorsque la série entière a sa variable complexe,

$$R(s) = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\limsup \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|}$$

lorsque ces expressions ont un sens.
La série entière converge alors absolument et normalement $(\sum_n |a_n||z|^n < +\infty)$ *à l'intérieur du disque de convergence* $D(0, R(S))$ *et diverge à l'extérieur.*

Exemple

- $S(z) = \sum_{n\geq 0} n!z^n$ a un rayon de convergence nul.
- $\sum_{n\geq 0} z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.
- $\sum_{n\geq 0} z^n/n!$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.

On dit qu'une série entière a un rayon de convergence R_{x_0} en x_0 si le rayon de convergence de la série entière obtenu en substituant $(x - x_0)$ à X vaut R.

Proposition

Soit $S = (a_n)$ *une série entière telle que* $R(S)_{x_0} > 0$. *Alors* $x \mapsto S(x - x_0)$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $B(x_0, R(S)_{x_0})$, *ainsi que ses dérivées successives, et* $\forall k \geq 0$,

$$S^{(k)}(x - x_0) = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(k-1)!} a_n (x - x_0)^{n-k}, \qquad a_k = S^{(k)}(x_0)/k!.$$

On dit que $f : U \to \mathbb{C}$ définie sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$ est **développable en série entière en** $x_0 \in U$ si il existe une série entière $S = (a_n)$ telle que

$$\exists \varepsilon > 0,\ R(S)_{x_0} \geq \varepsilon \ \&\ \forall |x - x_0| < \varepsilon,\ x \in U \ \&\ f(x) = S(x - x_0).$$

Une fonction est dite **analytique** en x_0 si elle est développable en SE avec un rayon de convergence positif au voisinnage de x_0.

Proposition

Une SE de rayon de convergence positif est analytique à l'intérieur de son disque de convergence, et si $x_1 \in B(x_0, R(S)_{x_0})$, si $T = (b_n)$ désigne la série entière en laquelle $S(x)$ se développe en x_1, alors

- $R(T)_{x_1} \geq R(S)_{x_0} - |x_1 - x_0|$;
- $b_n = S^{(n)}(x_1)/n!,\ n \geq 0$;
- $S_n(x)$ *donne le DL à l'ordre n de S en* x_0.

Proposition

Soient (a_n) et (b_n) deux suites à valeurs complexes, et S et T les séries entières associées.

- *Le rayon de convergence de la série entière $\alpha S + \beta T$ en x_0 vaut au moins $\min(R(S)_{x_0}, R(T)_{x_0})$.*
- *Idem pour celui de la série entière $S(X)T(X)$, qui est la SE associée à (c_n) où*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

- *Si $R(S)_{x_0} > 0$ et $R(T)_{S(x_0)} > 0$, alors $R(T \circ S)_{x_0} > 0$. Avec la formule de Faà di Bruno pour le calcul des dérivées successives d'une composée, on peut calculer les coefficients de $T \circ S$.*

La formule de Faà di Bruno : on suppose $h = f \circ g$, alors

$$h^{(n)}(t) =$$

$$\sum \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} f^{(k)}(g(t)) \left(\frac{g^{(1)}(t)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{g^{(2)}(t)}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{g^{(n)}(t)}{n!}\right)^{k_n}$$

où $k = k_1 + \ldots + k_n$ et la sommation est étendue à tous les $k_1, \ldots, k_n$ tels que $k_1 + 2k_2 + \ldots + \ldots + nk_n = n$.

Théorème (Solution analytique)

Supposons que l'ED linéaire du second ordre $\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)}$ *a des coefficients* p, q, r *qui sont des fonctions analytiques en* x_0*, de rayons de convergence positifs. Alors toute solution de l'ED est analytique en* x_0 *de rayon de convergence positif et peut être représentée par une série entière.*

Exemple

Trouver un développement en série entière d'une solution de

- $y' = -2xy$;
- $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

On considère l'équation de Legendre $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ (n réel fixé) qui apparaît dans la résolution de l'équation de Laplace (gravitation, électrostatique, diffusion de la chaleur, mécanique des fluides...). En cherchant une solution SE de cette équation, $S(x) = \sum_m a_m x^m$, on obtient

$$a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)} a_s,$$

et une base de solution est

$$\begin{cases} y_1(x) &= \quad 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - + \dots \\ y_2(x) &= x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - + \dots \end{cases}$$

Si n est un entier pair, $y_1(x)$ est un polynôme de degré n, et s'il est impair, il en va de même pour $y_2(x)$. Ces polynômes, multipliés par des constantes, sont appelés **polynômes de Legendre**, et jouent un rôle important en analyse et en calcul.

Les polynômes de Legendre sont donnés par la formule

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \\
&= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2-1)^n \right) \text{ (Formule de Rodriguez).}
\end{aligned}
$$

Certaines EDL du second ordre ne peuvent être résolues par la méthode des séries entières. La méthode de **Frobenius** donne une extension dans certains cas importants, dont l'équation de Bessel.

L'ED de Frobenius est de la forme $\boxed{y'' + \frac{b(x)}{x}y' + \frac{c(x)}{x^2}y = 0}$ avec b et c analytiques en 0. En passant à $\boxed{x^2y'' + xb(x)y' + c(x)y = 0}$, avec $b = (b_n)$, $c = (c_n)$, en cherchant une solution de la forme $y(x) = x^r(\sum_n a_n x^n)$ avec $a_0 \neq 0$, on obtient

$$\boxed{r(r-1) + b_0 r + a_0 = 0} \ : \ \text{Équation indicielle}$$

Théorème (Frobenius)

- **Cas 1** *: deux racines ne différant pas d'un entier : une base de solutions est* $y_i(x) = x^{r_i}(a_0 + a_1x + \ldots)$.
- **Cas 2** *: une racine double : une base de solutions est* $y_1(x) = x^r(a_0 + a_1x + \ldots)$ *et* $y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^r(A_1x + A_2x^2 + \ldots)$.
- **Cas 3** *: deux racines différant d'un entier* $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}^\star$ *: une base de solutions est* $y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + \ldots)$ *et* $y_2(x) = ky_1(x)\ln x + x^{r_2}(A_1x + A_2x^2 + \ldots)$ *où il se peut que* $k = 0$.

L'EDL d'odre 2 de Bessel s'écrit ($\nu > 0$)

$$\boxed{x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0}.$$

L'équation indicielle s'écrit $(r+\nu)(r-\nu) = 0$. Pour la solution $y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + \dots)$, la relation de récurrence s'écrit

$$a_1 = 0 \ \& \ (s+2\nu)sa_s + a_{s-2} = 0,$$

ce qui conduit à $a_{2p+1} = 0$ et

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}m!(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+m)}, \ m \geq 1.$$

On choisit, si $\nu = n \in \mathbb{N}^\star$, $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ ce qui conduit à la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n :

$$J_n(x) = x^n \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n}m!(n+m)!}.$$

Pour $\nu \geq 0$ non entier, on obtient avec l'aide de la fonction Γ les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre ν pour un choix judicieux de a_0 :

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m!\Gamma(\nu+m+1)},$$
$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m!\Gamma(-\nu+m+1)}.$$

Théorème

Si ν n'est pas entier, la solution générale de l'équation de Bessel s'écrit

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x).$$

Sinon, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. Alors on cherche une seconde solution qui est donnée par la fonction de Bessel de seconde espèce...

Les équations de Legendre, Bessel et d'autres peuvent s'écrire sous la forme

$$\boxed{(r(x)y')' + (q(x) + \lambda p(x))y = 0} \ : \text{Équation de Sturm-Liouville.}$$

Sturm et Liouville ont développé une méthode pour résoudre cette équation par des développements en série, en construisant une solution particulière sur un intervalle $a \leq x \leq b$ satisfaisant des conditions aux extrémités :

$$\text{Problème aux limites : } \left\{ \begin{array}{rcl} k_1 y(a) + k_2 y'(a) & = & 0; \\ l_1 y(b) + l_2 y'(b) & = & 0. \end{array} \right.$$

C'est ce que l'on appelle le problème de Sturm - Liouville. On supposera que p, q, r, r' sont continues sur $[a, b]$ et que $p(x) > 0$. On s'intéresse au cas $y \neq 0$: une solution à ce problème s'appelle une fonction propre associée à la valeur propre λ. Nous allons tenter d'expliquer l'approche de Sturm-Liouville.

Définition

Étant donnée $p > 0$ *sur* $[a, b]$*, une fonction de poids, nous dirons que* y_1 *et* y_2 *sont* **orthogonales** *si*

$$\int_a^b y_1(x)y_2(x)p(x)dx = 0.$$

Nous noterons $\| y \| = (\int_a^b p(x)y^2(x)dx)^{1/2}$

Théorème (Orthogonalité des fonctions propres)

Si p, q, r, r' sont à valeurs réelles, continues, et $p > 0$, si y_m et y_n sont deux fonctions propres associées aux valeurs propres $\lambda = m$ et n, alors y_m et y_n sont orthogonales sur $[a, b]$ relativement au poids p.
Si $r(a) = 0$, la première équation est inutile, et la seconde si $r(b) = 0$. On parle alors de problème singulier.
Si $r(a) = r(b)$, le problème aux limites peut être remplacé par un problème aux limites périodique du type

$$y(a) = y(b) \text{ et } y'(a) = y'(b).$$

On en déduit l'orthogonalité des polynômes de Legendre $(((1 - x^2)y')' + n(n+1)y = 0)$ sur $[-1, 1]$ relativement au poids 1. De même, on en déduirait une forme d'orthogonalité des fonctions de Bessel pour le poids x sur $[0, R]$.

Dans un $\mathbb{C}$-evn muni d'un produit scalaire, sous une condition très générale dite de **séparabilité** (existence d'une suite dense), on démontre par un procédé à la Graham-Schmidt qu'il existe une suite finie ou dénombrable de vecteurs $(e_n)_{n\in I}$ telle que

$$\left\{\begin{array}{c} < e_n, e_m >= 0 \Leftrightarrow n \neq m; \\ \forall u \in E,\ u = \sum_{n\in I} \frac{<u,e_n>}{<e_n,e_n>} e_n, \\ \| u \|^2 = \sum_{n\in I} \left| \frac{<u,e_n>^2}{<e_n,e_n>} \right| \quad \text{(Parseval, ou Pythagore).} \end{array}\right.$$

On appelle une telle suite une base orthogonale de E. Les suites de fonctions propres que nous avons vues précédemment en sont des exemples, et l'on peut généraliser facilement.

Exemple

- **Séries de Fourier** : une base de $L^2([-\pi,\pi])$ est $\{x \mapsto e^{imx} : m \in \mathbb{Z}\}$. On définit

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_m &= = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx, \\ b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx. \end{aligned}$$

  alors $f(x) = a_0 + \sum_{m\geq 1} a_m \cos mx + b_m \sin mx$ si f est continue, sinon l'identité est vraie presque partout.
- On peut faire des développements de Fourier-Legendre $f(x) = \sum_{m\geq 0} a_m P_m(x)$ avec $a_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx$.
- On peut aussi faire des développements de Fourier-Bessel avec les fonctions orthogonales $J_n(k_{mn}x)$, k_{mn} 'a préciser, avec le poids x sur $[0, R]$.

Définition

La transformée de Laplace d'une fonction f sur $\mathbb{R}^+$ est définie par

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

pourvu que l'intégrale existe au sens de Riemann généralisé ou de Lebesgue.
La transformée de Laplace de f continue par morceaux et telle que pour un k et M, $|f(t)| \leq Me^{-kt}$ existe pour $s > k$. Appelons ces conditions (CL).
La fonction f est appelée la transformée de Laplace inverse de la fonction F, notée parfois $\mathcal{L}^{-1}(F)$.

Proposition

$$\mathcal{L}(af + bg)(s) = a\mathcal{L}(f)(s) + b\mathcal{L}(g)(s).$$

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(s) = F(s - a).$$

Sous les hypothèses (CL), si f est continue et en outre f' existe et satisfait ces mêmes hypothèses, alors

$$\boxed{\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)}.$$

Ceci se généralise en

$$\boxed{\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)}$$

si f, f', ..., $f^{(n-1)}$ satisfont aux hypothèses de la définition pour des constantes k et M.

Considérons l'ED $y'' + ay' + by = r(t)$ avec $y(0) = K_0$ et $y'(0) = K_1$. On commence par faire la transformée de Laplace de cette équation :

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + a(sY - y(0)) + bY = R(s).$$

Alors si $Q(s) = 1/(s^2 + as + b)$,
$Y(s) = ((s + a)y(0) + y'(0))Q(s) + R(s)Q(s)$. Si $y(0) = y'(0) = 0$, alors $Y = RQ$. On appelle r la fonction d'entrée et y la fonction sortie de l'ED. Alors on appelle fonction de transfert la fonction

$$Q = \frac{Y}{R} = \frac{\mathcal{L}(\text{sortie})}{\mathcal{L}(\text{entrée})}.$$

Théorème

Si f satisfait (CL) alors

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{s}F(s).$$

La **fonction de Heaviside** est la fonction u définie par

$$u(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t).$$

Proposition

Notons $\tilde{f}(t) = f(t-a)u(t-a)$*. Alors*

$$\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a)) = e^{-as}F(s).$$

On parle parfois de la transformée de Laplace de Dirac en a, $\delta_a(x) = \mathbf{1}_{\{a\}}(x)$, avec la formule

$$\mathcal{L}(\delta_a)(s) = e^{-as}.$$

Nous expliquerons cette formule à l'occasion de la présentation des distributions.

On a explicité le lien entre $\mathcal{L}(f')$ et $\mathcal{L}(f)$. Le théorème de dérivation de l'intégrale paramétr'ee nous permet de calculer

$$\mathcal{L}(f)'(s) = -\int_0^\infty e^{-st}(tf(t))dt, \text{ ou encore } \mathcal{L}^{-1}(F')(t) = tf(t).$$

Si f satisfait (CL),

$$\mathcal{L}(\frac{f(t)}{t}) = \int_s^\infty F(\tilde{s})d\tilde{s}, \ s > k.$$

Théorème

Supposons que f et g satisfassent la condition (CL), alors

$$\boxed{\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(f \star g)}$$

où $\boxed{(f \star g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau}$.

Dans ce qui suit,

- J_0 désigne la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0,
- $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$,
- $Si(x) = \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$ ($Si(+\infty) = \pi/2$).

Formula	Name, Comments
$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	Definition of Transform Inverse Transform
$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$	Linearity
$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$ $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$	s-Shifting (First Shifting Theorem)
$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$ $\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$ $\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{(n-1)}f(0) - \cdots$ $\cdots - f^{(n-1)}(0)$	Differentiation of Function
$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)$	Integration of Function

$(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$ $= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$ $\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$	Convolution
$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$	t-Shifting (Second Shifting Theorem)
$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$ $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\tilde{s})\,d\tilde{s}$	Differentiation of Transform Integration of Transform

$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
$1/s$	1
$1/s^2$	t
$1/s^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$	$t^{n-1}/(n-1)!$
$1/\sqrt{s}$	$1/\sqrt{\pi t}$
$1/s^{3/2}$	$2\sqrt{t/\pi}$
$1/s^a \quad (a > 0)$	$t^{a-1}/\Gamma(a)$
$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$\dfrac{1}{(s-a)^n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$	$\dfrac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
$\dfrac{1}{(s-a)^k} \quad (k > 0)$	$\dfrac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{at}$

$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$ $\quad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$
$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$ $\quad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})$
$\dfrac{1}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega}\sin \omega t$
$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$
$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{1}{a}\sinh at$
$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\dfrac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega}e^{at}\sinh \omega t$
$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\cos \omega t$

$\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$
$\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^3}(\omega t-\sin\omega t)$

$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
$\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
$\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{t}{2\omega} \sin \omega t$
$\dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$
$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}(\cos at - \cos bt)$

$\dfrac{1}{s^4 + 4k^4}$	$\dfrac{1}{4k^3}(\sin kt \cos kt - \cos kt \sinh kt)$
$\dfrac{s}{s^4 + 4k^4}$	$\dfrac{1}{2k^2} \sin kt \sinh kt$
$\dfrac{1}{s^4 - k^4}$	$\dfrac{1}{2k^3}(\sinh kt - \sin kt)$
$\dfrac{s}{s^4 - k^4}$	$\dfrac{1}{2k^2}(\cosh kt - \cos kt)$

$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$
$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}\,\sqrt{s+b}}$	$e^{-(a+b)t/2}I_0\left(\dfrac{a-b}{2}t\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
$\dfrac{s}{(s-a)^{3/2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^k} \quad (k>0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{k-1/2} I_{k-1/2}(at)$
e^{-as}/s	$u(t-a)$
e^{-as}	$\delta(t-a)$

$\frac{1}{s}e^{-k/s}$	$J_0(2\sqrt{kt})$
$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-k/s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{kt}$
$\frac{1}{s^{3/2}}e^{k/s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi k}}\sinh 2\sqrt{kt}$
$e^{-k\sqrt{s}} \qquad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-k^2/4t}$

$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
$\frac{1}{s}\ln s$	$-\ln t - \gamma \quad (\gamma \approx 0.5772)$
$\ln \frac{s-a}{s-b}$	$\frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at})$
$\ln \frac{s^2+\omega^2}{s^2}$	$\frac{2}{t}(1 - \cos \omega t)$
$\ln \frac{s^2-a^2}{s^2}$	$\frac{2}{t}(1 - \cosh at)$
$\arctan \frac{\omega}{s}$	$\frac{1}{t}\sin \omega t$
$\frac{1}{s}\operatorname{arccot} s$	$\operatorname{Si}(t)$