Intégration sur les chemins et résidus

Pr. Lacroix

SEATECH
Université de Toulon

25 avril 2014

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert du plan complexe, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Nous avons vu comment généraliser la notion de dérivée lorsque f est à plusieurs variables (ici $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$). Nous présentons ici une alternative.

Définition

- *Nous dirons que f est* **dérivable** *en $z_0 \in \Omega$ ssi*

$$\exists f'(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0, \\ z \in \Omega}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

- *Lorsque ceci est vrai pour tout $z_0 \in \Omega$, nous dirons que f est* **holomorphe** *sur Ω.*

Les propriétés de la dérivée de la variable réelle s'étendent naturellement au cas présent : combinaisons linéaires, produits, quotients, composée.

Exemple

Les polynômes de la variable complexe sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.

Théorème (Analytique $\Rightarrow$ holomorphe)

Si la fonction f est analytique sur Ω, alors elle y est holomorphe. De plus, si en $z_0 \in \Omega$, elle se développe en la série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, alors $f'(z) = \sum_{n\geq 1} na_n(z-z_0)^{n-1}$.

Notons $z = x + iy$ et $f(z) = f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$, $P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{R}$. On remarque aisément que si f est dérivable en z_0 au sens complexe, alors en tant que fonction de deux variables elle est dérivable et $Df_{z_0}(h, k) = (h + ik)f'(z_0)$. Sa dérivée a donc une forme particulière :

Proposition (Équations de Cauchy)

Pour que f soit dérivable au sens complexe en z_0, il faut et il suffit qu'elle le soit en tant que fonction de deux variables en z_0, et qu'en outre

$$\text{\textit{Équations de Cauchy :}} \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial P}{\partial x} & = & \frac{\partial Q}{\partial y}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} & = & -\frac{\partial Q}{\partial x}. \end{array} \right.$$

On peut donner une expression polaire aux équations de Cauchy : en posant $g(r,\theta) = f(re^{i\theta}) = \tilde{P}(r,\theta) + i\tilde{Q}(r,\theta)$,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} & = & \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y} & = & -\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta}. \end{array} \right.$$

Exemple

- Vérifier que $e^z = \sum_{n\geq 0} z^n/n!$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
- En posant $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ et $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$, retrouver les formules de trigonométrie habituelles.

Une fonction analytique qui vérifie les équations de Cauchy produit des solutions de l'équation de Laplace : $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ et $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, entraîne par le théorème de Schwarz que

$$u_{xx} = -u_{yy},$$

soit

$$\boxed{\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 (= \nabla^2 v)}.$$

Cette dernière équation est **l'équation de Laplace** et elle apparaît dans de nombreux domaines de l'ingénierie : gravitation, électrostatique, conduction de chaleur, fluides incompressibles. Ses solutions sont les fonctions dites harmoniques (cf. infra).

Définition (Chemins)

Un **chemin** *est une application* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *continue et à dérivée continue par morceaux. On appelle* $\gamma(a)$ *son point initial, et* $\gamma(b)$ *son point final. On note* $\gamma^\star$ *son image,* $\gamma^\star \subset \mathbb{C}$.
On dit que le chemin est **fermé** *si* $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Soit $f : \gamma^\star \to \mathbb{C}$ continue.

Définition (Intégrale)

On appelle **intégrale** *de* f *sur le chemin* γ *la quantité notée* $\int_\gamma f(z)dz$, *et définie par*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

On dit que deux chemins γ_1 et γ_2 définis sur $[a_1, b_1]$ et $[a_1, b_2]$ sont **équivalents** si il existe $\phi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ bijective continûment dérivable telle que $\gamma_2 \circ \phi = \gamma_1$. On note $\gamma_1 \equiv \gamma_2$.

$$\gamma_1 \equiv \gamma_2 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Soient γ_1 et γ_2 deux chemins définis sur $[a, b]$ et $[b, c]$ tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Alors on appelle **somme** des chemins γ_1 et γ_2 le chemin noté $\gamma_1 + \gamma_2$ et défini par

$$\gamma_1 + \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } a \leq t \leq b; \\ \gamma_2(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

On appelle **opposé** du chemin γ défini sur $[0,1]$ le chemin noté $-\gamma$ défini par

$$-\gamma(t) = \gamma(1-t).$$

Alors

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz.$$

On a toujours

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \leq \| f \|_{\infty} \int_a^b |\gamma'(t)|dt,$$

où $\| f \|_{\infty} = \sup_{z\in\gamma^\star} |f(z)|$ et $\int_a^b |\gamma'(t)|dt = \ell(\gamma)$ représente la **longueur** du chemin γ.

Théorème (Indice)

Soit γ un chemin fermé et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^\star$. Pour $z \in \Omega$, on appelle **indice de z relativement à γ** *la quantité notée $Ind_\gamma(z)$ et définie par*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Alors $z \mapsto Ind_\gamma(z)$ prend des valeurs entières sur ω, est constante sur les composantes connexes de Ω, et vaut 0 sur la composante connexe non bornée de Ω.

En fait $Ind_\gamma(z)$ “compte” le nombre de tours que γ fait autour de z, comptés positivement dans le sens trigonométrique positif.

Proposition (Intégrales analytiques)

Soient γ *un chemin et* $\phi : \gamma^\star \to \mathbb{C}$ *continue. Alors*

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{C} \setminus \gamma^\star & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & f(z) = \int_\gamma \frac{\phi(u)}{u-z} du \end{array}$$

est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \gamma^\star$ *et*

$$f^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\phi(u)}{(u-z)^{n+1}} du, \; n \geq 1,$$

et le rayon de convergence de la série en laquelle f *se développe en* $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^\star$ *vaut au moins* $d(z, \gamma^\star)$.

On dit que F **est une primitive de** f **sur** Ω si F' existe et $F' = f$ sur Ω.

Proposition

Si $\gamma^\star \subset \Omega$ et si F est une primitive de f sur Ω, alors z_0 est l'origine de γ et z_1 son extrémité,

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

On appelle Ω **un ouvert connexe par arcs** si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est ouvert et si quels que soient z_1 et $z_2 \in \Omega$, il existe γ d'extrémités z_1 et z_2 tel que $\gamma^\star \subset \Omega$.

Proposition

Si Ω est ouvert connexe par arcs et si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est continue, alors deux primitives de f sur Ω ne diffèrent qu'au plus d'une constante.

Proposition

Si Ω est ouvert connexe par arcs et si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est continue, alors f admet une primitive sur Ω ssi son intégrale sur tout chemin fermé de support triangulaire contenu dans Ω est nulle.

Comme toute boule ouverte est connexe par arcs :

Corollaire

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est continue sur l'ouvert Ω, alors f admet localement des primitives sur Ω si elle a une intégrale nulle sur tout chemin fermé de support triangulaire.

Les supports triangulaires sont un artifice de reuve :

Proposition

Si Ω est ouvert connexe par arcs et si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est continue, alors elle admet sur Ω une primitive ssi son intégrale sur tout chemin fermé d'image contenue dans Ω est nulle.

Théorème (Goursat)

Si f est holomorphe sur l'ouvert connexe par arcs Ω, alors elle y admet des primitives.

Exemple

D'Alembert 1 : tout polynôme non constant à coefficients complexes a au moins un zéro. Considérer $z \mapsto \frac{nf(z)-zf'(z)}{zf(z)}$ et $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, et raisonner par l'absurde.

Théorème (Formule intégrale de Cauchy pour un disque)

Soit $f : D(z,R) \to \mathbb{C}$ *holomorphe, et* $0 < r < R$, $\gamma_r(t) = z + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. *Si* $|z-a| < r$,

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u-a} du.$$

En passant au paramétrage, il vient

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Une telle fonction est dite posséder la **propriété de moyenne**. Si f a la propriété de moyenne, alors $\overline{f}$, $Re(f)$, $Im(f)$ l'ont aussi. la classe des fonctions possédant la propriété de moyenne est appelée la classe des fonctions **harmoniques**. Elle contient donc celle des holomorphes.

Corollaire

Si f est holomorphe sur l'ouvert Ω, elle y est analytique.

Si le disque $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$ et $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$ pour $|z - a| < r$, alors

$$a_n = \frac{1}{2i\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) e^{-int} dt.$$

Si $M(r) = \sup_{z \in \gamma_r^\star} |f(z)|$, on en déduit les **inégalités de Cauchy** :

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \ n \geq 0.$$

Une **fonction entière** est une fonction holomorphe dans le plan entier $\mathbb{C}$.

Corollaire

Une fonction entière se développe en tout point du plan en une série entière de rayon de convergence infini.

Théorème (Liouville)

Une fonction entière bornée est constante.

Exemple

D'Alembert 2 : un polynôme non constant a un zéro complexe. Sinon son inverse est une fonction entière bornée.

Théorème (Formule de Cauchy)

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe sur l'ouvert connexe par arcs Ω. Soit γ un chemin fermé tel que $\gamma^\star \subset \Omega$. Soit enfin $a \in \Omega \setminus \gamma^\star$. Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) Ind_\gamma(a).$$

Plus généralement,

$$\frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = f^{(n)}(a) Ind_\gamma(a), \ n \geq 0.$$

Théorème (Morera)

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est continue sur l'ouvert Ω et y admet des intégrales nulles sur tout chemin triangulaire, alors elle est holomorphe sur Ω.

Proposition

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorphe et* $z_0 \in \Omega$. *Alors sont équivalentes :*
(i) : quel que soit $k \geq 0$, $f^{(k)}(z_0) = 0$ *;*
(ii) : f *est nulle dans un voisinnage de* z_0.

Définition

On dit que z_0 **est un zéro isolé de** f *si* $f(z_0) = 0$ *mais l'une des deux conditions précédentes n'a pas lieu.*
Dans ce cas, il existe un unique $p \geq 1$ *tel que localement,* $f(z) = (z - z_0)^p g(z)$ *avec* g *holomorphe au voisinnage de* z_0 *et* $g(z_0) \neq 0$.
On appelle p **l'ordre de multiplicité du zéro** *isolé* z_0.

Proposition

Soit Ω un ouvert connexe par arcs, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors si f a un zéro non isolé dans Ω, f y est identiquement nulle.

On appelle $X \subset \mathbb{C}$ **localement fini** si $X \cap K$ est fini quel que soit $K \subset \mathbb{C}$ compact.
Ainsi les zéros d'une holomorphe non nulle sur un ouvert connexe par arcs constituent un ensemble localement fini.

Si f, g sont holomorphes sur l'ouvert connexe par arcs Ω et si $\{f = g\}$ contient un compact infini, alors $f = g$ sur Ω.

Théorème (Principe du maximum)

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $a \in \Omega$. Si $|f|$ a un maximum local en a, alors f est constante au voisinage de a.

Exemple

D'Alembert 3 : si le polynôme non constant $g(z)$ ne s'annule pas, $|1/g|$ a un maximum...

Définition (Singularités)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *un ouvert et* $a \in \Omega$*. On dira que* f **présente en** a **une singularité** *si* $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ *est holomorphe.*
On parlera de **fausse singularité** *si* f *est bornée au voisinnage épointé de* a*.*
Sinon, on dira que a **est un point singulier isolé de** f*.*
Si $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$*, on dira que* a **est un pôle de** f*.*
Sinon, on dira que a **est une singularité essentielle de** f*.*

Définition

Soit $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ *holomorphe, et* $r > O$ *tel que* $D(a, r) \subset \Omega$.
Soit $0 < \rho < r$ *et* $\gamma_\rho(t) = a + \rho e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
Alors on appelle **résidu de** f **en** a *la quantité notée* $\mathbf{Res(f, a)}$, *définie indépendemment de* ρ *par*

$$Res(f, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} f(z)dz.$$

Proposition

Le résidu en une fausse singularité est nul, et la fonction est alors prolongeable par holomorphie en la fausse singularité.

Si f présente en a un pôle, alors localement

$$f(z) = \underbrace{\frac{a_0}{(z-a)^p} + \frac{a_1}{(z-a)^{p-1}} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{(z-a)}}_{\text{partie singulière}} + \underbrace{\sum_{n \geq p} a_n (z-a)^{n-p}}_{\text{partie régulière}}.$$

On appelle p la **multiplicité** du pôle. Alors

$$Res(f, a) = a_{p-1} = \lim_{z \to a} \frac{1}{(p-1)!} \left((z-a)^p f(z)\right)^{(p-1)}(z).$$

Proposition

Si f est holomorphe sur le disque épointé $D(a,r)\setminus\{a\}$ et présente en a une singularité isolée. Alors f se décompose en la somme $S+R$, où la partie régulière R est holomorphe au voisinnage de a, et la partie singulière S se développe en **série de Laurent** *sous la forme*

$$S(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{(z-a)^n},$$

la convergence étant normale dans toute couronne $|z-a|\geq R$, $R>0$.

On reconnaît un pôle au fait que le développement en série de Laurent est fini.
Dans tous les cas,

$$Res(f, a)$$

$$=$$

le coefficient de $\dfrac{1}{z-a}$ dans le développement de la partie singulière.

Théorème (Théorème des Résidus)

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe sur l'ouvert connexe par arcs Ω sauf peut-être aux points d'un ensemble $S \subset \Omega$ où elle présente des singularités isolées. Soit γ un chemin fermé tel que $\gamma^\star \subset \Omega \setminus S$. Alors

$$\boxed{\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{z\in S} Ind_\gamma(z)Res(f,z)}.$$

Intégrales du premier type.

Pour calculer $I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$ où $R(u,v)$ est une F.R. en (u,v) ne présentant pas de pôle sur $\{|z|=1\}$, on pose

$$G(z) = \frac{1}{iz}R(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}),$$

et alors

$$I = 2i\pi \sum Res(G,a),$$

où la somme est étendue à tous les pôles de G de module < 1.

Exemple

Calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{2}-\cos t}$.

Intégrales du second type.
Pour calculer $\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t)dt}$ où $R(t)$ est une F.R. en t ne présentant pas de pôle réel, et telle que $\lim_{\infty} tR(t) = 0$. On intègre alors $R(z)$ sur le contour constitué du segment réel $[-\rho, +\rho]$ et du demi-cercle $\{\rho e^{it} : 0 \leq t \leq \pi\}$. La contribution à cette intégrale de celle sur le demi-cercle tend vers 0 lorsque $\rho \to \infty$, et on obtient

$$I = 2i\pi \sum_{Im(z)>0} Res(R, z) \qquad (= -2i\pi \sum_{Im(z)<0} Res(R, z)).$$

Exemple

Calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Intégrales du troisième type.

Pour calculer $\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t)e^{it}dt}$ où $R(t)$ est une F.R. en t.

3-1 : si R ne présente pas de pôle sur l'axe réel, et si $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, alors on a une convergence en partie principale de Cauchy :

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} f(x)e^{ix}dx = 2i\pi \sum_{Im(a)>0} Res(f(z)e^{iz}, a).$$

3-2 : si f présente sur l'axe un nombre fini de pôles, alors si a est l'un d'eux et si $\gamma_{a,\rho}(t) = a + \rho^{i(\pi-t)}$, $0 \leq t \leq \pi$,

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_{a,\rho}} f(z)dz = i\pi Res(f, a), \ \lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_{a,\rho}} f(z)e^{iz}dz = i\pi Res(f(z)e^{iz}, a).$$

Il en résulte que

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =$$
$$2i\pi \sum_{Im(a)>} Res(f,a) + i\pi \sum_{Im(a)=0} Res(f,a),$$

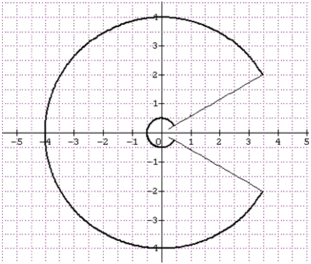
$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx =$$
$$2i\pi \sum_{Im(a)>} Res(f(z)e^{iz},a) + i\pi \sum_{Im(a)=0} Res(f(z)e^{iz},a),$$

à condition que les intégrales de Riemann généralisées convergent.

Exemple

Calculer $I = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-3x+2)(x^2+1)}$.

Intégrales du quatrième type. Il s'agit d'intégrales de la forme $\boxed{I = \int_0^\infty R(x)/x^\alpha dx}$, avec $0 < \alpha < 1$, et R une F.R. sans pôle sur l'axe, et telle que $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$.
On définit $z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha Arg(z)}$, $Arg(z)$ ayant été choisi dans $]0, 2\pi[$.
On prend donc z dans la coupure $\Gamma = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$.
En intégrant sur le contour "pacman",



on déduit

$$(1 - e^{-2i\pi\alpha}) \int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx = 2i\pi \sum_{a\in\Gamma} Res(\frac{R(z)}{z^\alpha}, a).$$

Intégrales du cinquième type. Il s'agit d'intégrales de la forme $I = \int_0^\infty R(x)\ln x dx$, où R une F.R. sans pôle sur l'axe, et telle que $\lim_{x\to\infty} xR(x) = 0$.
On définit $\ln(z) = \ln|z| + iArg(z)$, et l'on choisit la détermination ln complexe associée à la coupure Γ, et un choix de $Arg(z) \in]0, 2\pi[$. Cette fonction $\ln(z)$ est holomorphe là où elle est définie. Alors on intègre $R(z)\ln(z)$ sur le contour pacman, et on obtient à la limite

$$\int_0^\infty R(x)\ln^2(x)dx - \int_0^\infty R(x)(\ln x + 2i\pi)^2 dx$$

$$=$$

$$2i\pi \sum_{a\in\Gamma} Res(R(z)\ln(z), a),$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \int_0^\infty R(x)\ln x dx & = & -\frac{1}{2}\mathcal{R}e\left(\sum_{a\in\Gamma} Res(R(z)\ln(z),a)\right), \\ \int_0^\infty R(x)dx & = & -\frac{1}{2\pi}\mathcal{I}m\left(\sum_{a\in\Gamma} Res(R(z)\ln(z),a)\right). \end{array} \right.$$

Exemple

- $I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$, $0 < \alpha < 1$.
- $I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}$.