ISITV-GO 2013-S1-Corrigé

Premier exercice. On reconnaît une intégrale du premier type.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma_1} \frac{1}{iz} \frac{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})+1}{2+\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})} dz = \int_{\gamma 1} \frac{z^2+2z+1}{(z+2i)^2+3)} dx \\ &= 2i\pi(Res(f,0) + Res(f, -i(2-\sqrt{3}))), \end{aligned}$$

où $f(z) = \frac{z^2+2z+1}{(z+2i)^2+3)}$ a trois pôles simples en 0 et $-i(2 \pm \sqrt{3})$, et $|i(2+\sqrt{3})| > 1$. Les pôles étant simples, on calcule

$$Res(f,0) = -1,\ Res(f, -i(2-\sqrt{3})) = 1 - \frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Par conséquent, $I = 2\pi/\sqrt{3}$.

Second exercice. La fonction g est bornée à support compact donc intégrable sur la droite. Elle a donc une transformée de Fourier, qui se calcule par intégration par parties : si $u = 0$, $\hat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1$, sinon

$$\begin{aligned} \hat{g}(u) &= \int_{-1}^{0} (-x) e^{-2i\pi ux} dx + \int_0^1 x e^{-2i\pi ux} dx = \int_0^1 2y\cos(2\pi uy) dy && \text{(changement de variable)} \\ &= 2\left[\frac{\sin(2\pi uy)}{2\pi u}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\sin(2\pi uy)}{2\pi u} dy && \text{(IPP)} \\ &= \frac{\sin(2\pi u)}{\pi u} + \frac{\cos(2\pi u)-1}{2\pi^2 u^2}. \end{aligned}$$

Troisième exercice. Notons $-1 \leq b < a \leq 0$ les noeuds de la quadrature recherchée. Pour qu'elle soit d'ordre maximal, si $M(t) = (t-a)(t-b) = t^2 - st + p$, avec $s = a+b$ et $p = ab$, il faut que $\int_{-1} M(t)dt = 0$ et $\int_{-1}^0 tM(t)dt = 0$ (on ne peut pas demander plus car une quadrature à deux noeuds a un ordre ne pouvant dépasser 4. Ces deux conditions se traduisent par le système

$$\begin{cases} s + 2p &= -\frac{2}{3} \\ 2s + 3p &= -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Ce système se résoud en $s = -1$ et $p = 1/6$. En substituant, on obtient que b satisfait l'équation du second degré

$$6b^2 + 6b + 1 = 0$$

qui a deux racines $\frac{-3\pm\sqrt{3}}{6} \in [-1, 0]$, dont la somme vaut -1. On obtient donc

$$a = \frac{-3+\sqrt{3}}{6},\ b = \frac{-3-\sqrt{3}}{6}.$$

Ensuite, pour déterminer les poids β_a et β_b associés à cette quadrature, on résoud le système de Van der Monde associé :

$$\begin{cases} \beta_a + \beta_b &= 1 \\ a\beta_a + b\beta_b &= \int_{-1}^0 tdt = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

La solution de ce système est $\beta_a = \beta_b = \frac{1}{2}$. Alors la quadrature s'écrit

$$\int_{-1}^{0} g(t)dt = \frac{1}{2}(g(\frac{-3-\sqrt{3}}{6}) + g(\frac{-3+\sqrt{3}}{6})).$$

Elle est d'ordre 4, c'est à dire exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Quatrième exercice. Comme $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ est un point fixe de la transformée de Fourier, la transformée de Fourier de (E) s'écrit

$$\text{(EF)} \qquad \hat{y}(u) = \frac{e^{-\pi u^2}}{1 + 2i\pi u}$$

qui est intégrable sur la droite (l'exponentielle l'emporte sur le polynôme), et donc une solution de (E) est

$$y_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi ux} \frac{e^{-\pi u^2}}{1 + 2i\pi u} du.$$

La solution générale s'obtient en effectuant la somme de cette solution particulière avec la solution générale de l'équation homogène associée, soit

$$y_G(x) = y_0(x) + Ke^{-x}.$$