

# Schémas numériques et optimisation

Pr. Lacroix

SEATECH  
Université de Toulon

19 mai 2014

## 1 Intégration ED

- Définitions
- Pas séparés
- Runge-Kutta
- Implicites
- Pas liés
- Adams
- Prédiction-Correction

- Différentiation rétrograde

## 2 Approximation

- Meilleure approximation
- Exemples de maq
- Maq discrète
- MAU
- Padé

## 3 Ondelettes

Soit  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{P}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ , et  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  dérivable. On appelle **système différentiel du premier ordre** l'équation

$$y' = f(x, y).$$

On dit que  $y$  est solution du système sur  $[a, b]$  si  $y$  vérifie l'équation pour tout  $x \in [a, b]$ .

On appelle **problème de Cauchy** le système différentiel précédent augmenté d'une **condition initiale**

$$f(a) = y_0.$$

## Théorème

*S'il existe une constante  $L$  telle que pour tout  $x \in [a, b]$  et tout  $u, v \in \mathbb{R}^p$ ,*

$$\| f(x, u) - f(x, v) \| \leq L \| u - v \|$$

*alors le problème de Cauchy admet une solution unique quelle que soit la condition initiale.*

Ce résultat, s'il garantit l'existence d'une solution, ne permet pas pour autant de l'identifier. Différentes techniques ont été développées aux chapitres précédents pour identifier une telle solution. Parfois elles ne s'appliquent pas et il est nécessaire de rechercher une solution approchée par des méthodes numériques.

**On suppose dans ce qui suit que les conditions de ce théorème sont satisfaites.**

On le fera en choisissant certains points  $x_0, \dots, x_N$  de  $[a, b]$  en lesquels nous notons  $y(x_n)$  la solution exacte et  $y_n$  la solution approchée.

### Définition

On parle de **méthode à pas éparés** si  $y_{n+1}$  ne dépend que de  $y_n$ , et de **méthode à pas liés** si  $y_{n+1}$  dépend de  $y_n, \dots, y_{n-k}$ .

On appelle **pas d'intégration** la quantité  $h = (b - a)/n$  et on choisira  $x_k = a + kh$ .

Le schéma ou algorithme d'intégration numérique sera ici

$$\begin{cases} y_0; \\ y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h), \quad 0 \leq n < N. \end{cases}$$

Le choix de  $\phi$  va définir la méthode.

### Définition

On dit qu'une méthode est **consistante** si pour toute solution  $y$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n < N} \left\| \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \phi(x_n, y_n, h) \right\| = 0.$$

### Théorème

Une CNS de consistance d'une méthode à pas séparés est que quel que soit  $x \in [a, b]$  et  $u \in \mathbb{R}^p$ ,

$$\phi(x, u, 0) = f(x, u).$$

On note  $z_0 \in \mathbb{R}^p$  et  $z_{n+1} = z_n + h[\phi(x_n, z_n, h) + \epsilon_n]$  (perturbation).

### Définition

*On dit que la méthode à pas séparés est stable si il existe deux constantes  $M_0$  et  $M_1$  telles que quel que soient  $h, \epsilon_i$ ,*

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y_n - z_n\| \leq M_0 \|y_0 - z_0\| + M_1 \max_{0 \leq n < N} \|\epsilon_n\| .$$

### Théorème

*S'il existe  $M$  telle que pour tout  $h$  proche de 0,  $x \in [a, b]$  et  $u, v \in \mathbb{R}^p$ ,*

$$\|\phi(x, u, h) - \phi(x, v, h)\| \leq M \|u - v\|$$

*alors la méthode à pas séparés est stable.*

## Définition

*On dit que la méthode à pas séparés est convergente si*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N} \|y_n - y(x_n)\| = 0.$$

## Théorème

*Si une méthode à pas séparés est consistante et stable alors elle est convergente.*

La question de la vitesse de convergence est, dans la pratique, importante...

## Définition

On dit qu'une méthode à pas séparés est d'**ordre**  $r$  s'il existe une constante positive  $K$  telle que

$$\max_{0 \leq n < N} \left\| \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \phi(x_n, y(x_n), h) \right\| \leq Kh^r.$$

## Théorème

Si une méthode à pas séparés est d'ordre  $r$  et si elle vérifie la condition de stabilité alors

$$\max_{0 \leq n \leq N} \| y_n - y(x_n) \| \leq K' h^r$$

avec  $K' = K(\exp(M(b-a)) - 1)/M$ .

De plus, si  $e_n = y_n - y(x_n)$ , alors

$$\| e_{n+1} \| \leq (1 + hM) \| e_n \| + Kh^{r+1}.$$

## Définition

On appelle **méthode d'Euler** la méthode à pas séparés basée sur le choix

$$\phi(x, u, h) = f(x, u).$$

On appelle **méthode de Runge-Kutta** une méthode où

$$\begin{cases} k_1 = f(x, u) \\ k_2 = f(x + \theta_2 h, u + a_{2,1} h k_1) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ k_m = f(x + \theta_m h, u + a_{m,1} h k_1 + \dots + a_{m,m-1} h k_{m-1}) \\ \phi(x, u, h) = c_1 k_1 + \dots + c_m k_m \end{cases}$$

où  $m$  est le **rang** de la méthode, et les constantes  $\theta_i, a_{i,j}, c_i$  sont choisies pour obtenir une méthode d'un ordre aussi grand que possible.

La seule méthode de rang 1 et d'ordre 1 est celle d'Euler. Il en existe une infinité de rang et d'ordre  $m$  pour  $m = 2, 3, 4$ , Il n'y a pas de méthode de rang et d'ordre 5.

La plus utilisée est la suivante de rang et d'ordre 4 :

$$\begin{cases} k_1 = f(x, u) \\ k_2 = f(x + h/2, u + hk_1/2) \\ k_3 = f(x + h/2, u + hk_2/2) \\ k_4 = f(x + h, u + hk_3) \\ \phi(x, u, h) = (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \end{cases}$$

Des problèmes de convergence surviennent lorsque l'intervalle d'intégration devient grand et/ou lorsque la fonction présente de fortes oscillations. On cherche à surmonter ces problèmes en choisissant plutôt des méthodes de Runge-Kutta **implicites**. La plus simple est

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \text{ Euler implicite.}$$

Sinon il existe des méthodes de Runge-Kutta implicites qui se décrivent par

$$\begin{cases} k_1 = f(x + \theta_1 h, u + a_{1,1} h k_1 + \dots + a_{1,m} h k_m) \\ k_2 = f(x + \theta_2 h, u + a_{2,1} h k_1 + \dots + a_{2,m} h k_m) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ k_m = f(x + \theta_m h, u + a_{m,1} h k_1 + \dots + a_{m,m} h k_m) \\ \phi(x, u, h) = c_1 k_1 + \dots + c_m k_m \end{cases}$$

Pour les **méthodes à pas liés**, les  $y_n$  sont calculés récursivement par une relation de la forme

$$\alpha_k y_{n+k} + \dots + \alpha_0 y_n = h [\beta_k f_{n+k} + \dots + \beta_0 f_n]$$

où  $f_n = f(x_n, y_n)$ . Pour initialiser une telle récurrence, si  $y_0$  est la condition initiale,  $y_1, \dots, y_{k-1}$  devront être calculées différemment, généralement par une méthode à pas séparés.

### Théorème

*Si  $\beta_k \neq 0$ , l'équation implicite a une solution unique pour tout  $n$  si*

$$h < \frac{1}{L} \left| \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right|$$

*où  $L$  est la constante de Lipschitz de  $f$  qui satisfait aux conditions de Cauchy.*

L'avantage d'une méthode à pas liés est sa rapidité de calcul.

## Définition

Une méthode à pas liés est **consistante** si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N-k} \left| \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k \alpha_i y(x_{n+i}) - \sum_{i=0}^k \beta_i f(x_{n+i}, y(x_{n+i})) \right| = 0.$$

Posons

$$\begin{cases} \alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_k t^k \\ \beta(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_k t^k. \end{cases} \text{ hfill}$$

## Théorème

Une CNS de consistance est que  $\alpha(1) = 0$  et  $\alpha'(1) = \beta(1)$ .

Pour la **stabilité**, choisissons  $z_0, \dots, z_{k-1}$  arbitrairement, et définissons  $z_n$  par

$$\alpha_k z_{n+k} + \dots + \alpha_0 z_n = h [\beta_k \bar{f}_{n+k} + \dots + \beta_0 \bar{f}_n + \epsilon_n], \quad 0 \leq n \leq N-k.$$

### Définition

La méthode est dite **stable** si il existe  $M_0, M_1$  telles que quel que soit  $h$  et  $\epsilon_0, \dots, \epsilon_{N-k}$ ,

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - z_n| \leq M_0 \max_{0 \leq i \leq k-1} |y_i - z_i| + M_1 \max_{0 \leq n \leq N-k} |\epsilon_n|.$$

### Théorème

*Une CNS de stabilité est que toutes les racines de  $\alpha$  soient de module inférieur ou égal à 1 et que celles de module 1 soient simples.*

### Définition

*Une méthode est **convergente** si*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(x_n)| = 0.$$

### Théorème

*Une CNS de convergence est que la méthode soit stable et consistante.*

## Définition

Une méthode à pas liés est **d'ordre**  $r$  s'il existe une constante positive  $K$  telle que

$$\max_{0 \leq n \leq N-k} \left| \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k \alpha_i y(x_{n+i}) - \sum_{i=0}^k \beta_i f(x_{n+i}, y(x_{n+i})) \right| \leq Kh^r.$$

## Théorème

Si une méthode à pas liés est d'ordre  $r$  et stable, et si de plus  $\max_{0 \leq i \leq k-1} |y_i - y(x_i)| = \mathcal{O}(h^r)$ , alors

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(x_n)| = \mathcal{O}(h^r).$$

## Théorème

*Une CNS pour qu'une méthode à pas liés soit consistante est qu'elle soit au moins d'ordre 1.*

On contrôlera en général l'erreur en programmant simultanément une méthode d'ordre  $r$  et une autre de même type d'ordre  $r + 1$ , et en estimant l'erreur par l'écart observé entre les deux méthodes. On choisira une méthode explicite d'ordre  $r$  pour l'initialisation  $y_1, \dots, y_{k-1}$ .

Les **méthodes d'Adams** sont des méthodes à pas liés de la forme

$$y_q - y_j = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i}, \quad j \leq q.$$

Selon les valeurs de  $j$  et de  $q$ , on distingue les plus courantes :

♡ **Adams-Bashforth :**

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n) \quad \text{ordre 2}$$

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n) \quad \text{ordre 3}$$

$$y_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n) \quad \text{ordre 4}$$

◇ **Adams-Moulton :**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n) \quad \text{ordre 2}$$

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{12}(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n) \quad \text{ordre 3}$$

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h}{24}(9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n) \quad \text{ordre 4}$$

**♣ Nyström :**

$$y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1} \quad \text{ordre 2}$$

$$y_{n+3} = y_{n+1} + \frac{h}{3}(7f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n) \quad \text{ordre 3}$$

$$y_{n+4} = y_{n+2} + \frac{h}{3}(8f_{n+3} - 5f_{n+2} + 4f_{n+1} - f_n) \quad \text{ordre 4}$$

♠ **Milne-Simpson :**

$$y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+2} \quad \text{ordre 2}$$

$$y_{n+3} = y_{n+1} + \frac{h}{3}(f_{n+3} + 4f_{n+2} + f_{n+1}) \quad \text{ordre 3}$$

♡ **Adams-Bashforth :**

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n) \quad \text{ordre 2}$$

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n) \quad \text{ordre 3}$$

$$y_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n) \quad \text{ordre 4}$$

Pour une méthode implicite, il faut à chaque pas résoudre l'équation implicite pour trouver  $y_{n+k}$ . Parfois cette résolution fait appel à d'autres méthodes numériques pour trouver une solution approchée, les **méthodes d'approximations successives** (points fixes). Si le point de départ des approximations successives est suffisamment bon, on peut se contenter de ne faire qu'une seule approximation, qui fournit la valeur de départ (c'est le **prédicteur**) et on fait ensuite une itération (c'est le **correcteur**). On a le schéma suivant :

$$\alpha_k^* y_{n+k}^* + \dots + \alpha_0^* y_n^* = h(\beta_{n+k-1}^* f_{n+k-1} + \dots + \beta_0^* f_n);$$

$$\alpha_k y_{n+k} + \dots + \alpha_0 y_n = h(\beta_{n+k} f(x_{n+k}, y_{n+k}^*) + \beta_{k-1} f_{n+k-1} + \dots + \beta_0 f_n).$$

## Théorème

*Si le prédicteur est d'ordre  $r - 1$  et si le correcteur est d'ordre  $r$ , alors*

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(x_n)| = \mathcal{O}(h^r)$$

*à condition que  $\max_{0 \leq i \leq N} |y_i - y(x_i)| = \mathcal{O}(h^r)$ .*

Pour ces méthodes de prédiction-correction, l'erreur globale est de l'ordre de  $|y_{n+k}^* - y_{n+k}|$ .

**Différentiation rétrograde** : il s'agit d'une modification de la méthode d'Adams, qui consiste à approcher la dérivée de  $y$ , c'est à dire  $f$ , par la dérivée du polynôme d'interpolation  $q$  défini par

$$q(x_{n-i+1}) = y_{n-i+1}, \quad 0 \leq i \leq k; \quad q'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, q(x_{n+1})).$$

$$y_{n+2} = \frac{1}{3}(4y_{n+1} - y_n) + \frac{2h}{3}f_{n+2} \quad \text{ordre 2}$$

$$y_{n+3} = \frac{1}{11}(18y_{n+2} - 9y_{n+1} + 2y_n) + \frac{6h}{11}f_{n+3} \quad \text{ordre 3}$$

$$y_{n+4} = \frac{1}{25}(48y_{n+3} - 36y_{n+2} + 16y_{n+1} - 3y_n) + \frac{12h}{25}f_{n+4} \quad \text{ordre 4}$$

...

En écrivant le polynôme  $q$  à l'aide des différences divisées de  $y$  aux points  $x_i$ , ces méthodes s'expriment par l'équation

$$\sum_{j=1}^k h_n \prod_{i=1}^{j-1} (x_{n+1} - x_{n+1-i}) [x_{n+1}, \dots, x_{n-j+1}]_y = h_n f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

L'avantage ici est que l'on voit par cette formule qu'il est possible d'adapter le pas de la méthode (le modifier en cours de calcul par exemple pour l'adapter à des variations de  $f$ ).

**Problèmes aux limites** : il s'agit d'une rubrique dans laquelle on s'intéresse à la recherche d'approximations numériques par un schéma d'une ED pour laquelle des conditions aux limites (en  $a$  ou en  $b$ ) sont données, éventuellement des contraintes sur les valeurs de la solution en certains points. On débouche alors sur le domaine dit des **méthodes de tir**.

Soit  $H$  un evn et  $C \subset H$ . On dit que  $\bar{g}$  est une **meilleure approximation de  $g$  dans  $C$**  si

$$\|g - \bar{g}\| = \min_{c \in C} \|c - g\|.$$

### Théorème

*Si  $C$  est compacte ou bien un sev de dimension finie de  $H$ , alors une meilleure approximation de tout vecteur de  $H$  existe.*

*Sous les mêmes hypothèses mais si en outre  $\|\cdot\|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$  alors la meilleure approximation est unique. On parle alors de **meilleure approximation quadratique (maq)**.*

## Théorème

Les vecteurs  $g_1, \dots, g_n$  sont linéairement indépendants ssi leur **déterminant de Gram**

$$D(g_1, \dots, g_n) = |(\langle g_i, g_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}|$$

*est non nul.*

## Théorème

Si  $C = \text{Vect}(g_1, \dots, g_n)$  alors la maq de  $g$  s'écrit  $\bar{g} = \sum_{i=1}^n a_i g_i$   
où les  $a_i$  sont solution de

$$\sum_{i=1}^n a_i \langle g_i, g_j \rangle = \langle g, g_j \rangle, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Ce système se résoud facilement si les  $g_i$  sont orthogonaux. Si de plus ils sont orthonormaux, alors on appelle les  $a_i$  les **coefficients de Fourier** de  $g$  relativement à  $\{g_1, \dots, g_n\}$ ,  $\bar{g}$  est la **somme de Fourier**, et

$$a_i = \langle g, g_i \rangle, \quad \|g - \bar{g}\|^2 = \|g\|^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad (\text{Parseval} - \text{Pythagore}).$$

Il est donc important pour déterminer une maq de produire une bon de  $C$ . Le procédé d'orthonormalisation de **Gram-Schmidt** le permet :

$$\begin{aligned} h_1 &= g_1 / \| g_1 \| \\ u_i &= g_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle g_i, h_j \rangle h_j; \\ h_i &= u_i / \| u_i \|, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Pour des questions de stabilité numérique, on préfère le procédé de **Gram-Schmidt modifié** :

$$\begin{aligned} h_i^{(1)} &= g_i, \quad 1 \leq i \leq n; \\ h_k &= h_k^{(i)} / \| h_k^{(i)} \|, \quad i \leq k \leq n; \\ h_j^{(i+1)} &= h_j^{(i)} - \langle h_i, h_j^{(i)} \rangle h_i, \quad i+1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

-**Intégrale pondérée** : sur l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathcal{C}([a, b])$ , en choisissant  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $w > 0$   $\lambda_1$  - p.s., on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt.$$

♣ **Polynomiale** : si l'on choisit  $g_i(x) = x^i$ , alors on construit des familles de polynômes orthogonaux (cf. quadratures de Gauss).

◇ **Trigonométrique** :  $g_0(x) = 1$ ,  $g_{2p}(x) = \cos(px)$ ,  
 $g_{2p-1}(x) = \sin(px)$ ,  $p \geq 1$ ,  $a = -\pi$ ,  $b = \pi$ .

Pour la Maq discrète, on choisit les  $x_i$  deux à deux distincts et les  $w(x_i) > 0$ , puis on pose

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)w(x_i).$$

On suppose  $g_1, \dots, g_n$  linéairement indépendants et on pose pour  $g \in H$ ;  $\bar{g} = \sum_{i=1}^n a_i g_i$ . On pose

$$\begin{aligned} b &= (\sqrt{w(x_1)}f(x_1), \dots, \sqrt{w(x_n)}f(x_n))^t; \\ a &= (a_1, \dots, a_n)^t; \\ A &= (\sqrt{w(x_i)}g_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq n}. \end{aligned}$$

Alors les  $(a_i)$  doivent vérifier le système

$$A^t A a = A^t b,$$

où la matrice  $A^t A$  est symétrique définie positive. On résoud en utilisant la factorisation de Cholesky de  $B = A^t A$  ( $B = LL^t$  où  $L$  est triangulaire inférieure).

On muni  $H = \mathcal{C}([a, b])$  de la norme sup. Soit  $C$  un sev de  $H$ . On dit que  $g \in H$  a une **meilleure approximation uniforme dans  $C$**  (MAU) s'il existe  $\bar{g} \in C$  tel que

$$\|g - \bar{g}\|_{\infty} = \min_{c \in C} \|c - g\|_{\infty} .$$

Nous supposons que  $C = \text{Vect}(g_1, \dots, g_n)$ .

### Théorème (Condition de Haar)

*Une CNS pour que la MAU  $\bar{g}$  de  $g$  dans  $C$  soit unique pour tout  $g \in H$  est que chaque  $g_i$  admette au plus  $n - 1$  racines dans  $[a, b]$ . On dit alors que les  $g_i$  forment un **système de Tchebychev** sur  $[a, b]$ .*

## Théorème

*Si la condition de Haar est vérifiée et s'il existe  $c \in C$  telle que*

$$g(x_i) - c(x_i) = \epsilon(-1)^i a_i, \quad 0 \leq i \leq n,$$

*avec  $\epsilon = \pm 1$ ,  $a_i > 0$  et  $a \leq x_0 \leq \dots \leq x_n \leq b$ , alors la MAU  $\bar{g}$  de  $g \in H$  vérifie*

$$\|g - \bar{g}\|_\infty \geq \min_{0 \leq i \leq n} a_i.$$

## Théorème (Alternance de Tchebychev)

*Une CNS pour que  $\bar{g} \in C$  soit la MAU de  $g \in H$  est que*

$$|g(x_i) - \bar{g}(x_i)| = \|g - \bar{g}\|_\infty \quad \text{et} \quad g(x_i) - \bar{g}(x_i) = -(g(x_{i+1}) - \bar{g}(x_{i+1}))$$

*en au moins  $n + 1$  abscisses distinctes  $x_i$  de  $[a, b]$ .*

On renvoie à l'algorithme de **Rémès** pour la construction effective de  $\bar{g}$ .

La **Padé** approximation consiste à construire une fraction rationnelle d'une fonction  $f$  admettant un DL en  $t_0$  tel que le DL en  $t_0$  de la FR coïcide avec celui de  $f$  en  $t_0$  jusqu'à au moins l'ordre égal à la somme des degrés des polynômes constituant la FR irréductible. On veut donc écrire

$$f(t)Q(t) - P(t) = \mathcal{O}(t^{p+q+1}).$$

Si  $f(t) = c_0 + c_1t + \dots$  et  $P(t) = a_0 + \dots + a_pt^p$  et  $Q(t) = b_0 + \dots + b_qt^q$ , alors par identification

$$a_0 = c_0b_0$$

$$a_1 = c_1b_0 + c_0b_1$$

$$\vdots$$

$$a_p = c_pb_0 + c_{p-1}b_1 + \dots + c_{p-q}b_q$$

$$0 = c_{p+1}b_0 + \dots + c_{p-q+1}b_q$$

$$\vdots$$

$$0 = c_{p+q}b_0 + \dots + c_pb_q$$

On prendra  $b_0 = 1$  puis on résoud en  $b$ , puis en  $a$ .

Les **ondelettes** permettent d'adapter la base de Fourier aux variations locales d'une fonction. Dans  $L^2(\lambda_1)$  (espace quotient des fonctions de carré intégrable modulo 0), on construit une base d'ondelettes. Soit d'abord

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0, 1]; \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ensuite, on pose  $w_{j,k}(x) = 2^{j/2} w(2^j x - k)$ . Alors

$$\langle w_{j,k}, w_{r,s} \rangle = \delta_{j,r} \delta_{k,s}.$$

Ces fonctions constituent une base de  $L^2(\lambda_1)$ .

Une fonction  $w$  qui conduit après dilatation et translation à une base de  $L^2$  s'appelle **une ondelette**.

La fonction  $\phi(x) = \mathbf{1}_{[0,1[}$  vérifie

$$w(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1) \text{ et } (\phi(x - k))_{k \in \mathbb{Z}} \text{ est orthonormal.}$$

Une telle fonction  $\phi$  s'appelle **fonction d'échelle**.

Soient  $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$  les sev  $V_j$  engendrés par  $(\phi(2^j x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ . Alors

- $V_j$  a pour bon  $\{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ ;
- $f(x) \in V_j$  ssi  $f(2^{k+j} x) \in V_k$ ;
- $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ ,  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\lambda_1)$ .

Les  $\phi_{j,k}$  donnent un exemple d'**analyse multirésolution**. La famille  $\{\phi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$  ne constitue cependant pas une base de  $L^2(\lambda_1)$ . Les fonctions  $\{w_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$  s'appellent **ondelettes de Haar**. D'autres types d'ondelettes ont été étudiées. les procédures de calcul des développements en série

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f(x), w_{j,k}(x) \rangle w_{j,k}(x)$$

utilisent des algorithmes reliant les calculs des  $\alpha_{j,k} = \langle f(x), w_{j,k}(x) \rangle$  aux  $\beta_{j,k} = \langle f(x), \phi_{j,k}(x) \rangle$ .