I : on considère l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$.

1) Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes pour le pas $h = \frac{1}{3}$.

2) Calculer la valeur exacte de I.

3a) Pourquoi la valeur numérique obtenue à la question 1) est-elle supérieure à $\ln(2)$?

3b) Est-ce vrai quel que soit h?

3c) Proposer une autre fonction pour laquelle l'intégrale évaluée par la méthode des trapèzes est toujours supérieure à la valeur exacte de l'intégrale.

4) Si on souhaite évaluer I avec la méthode de Simpson, quel pas faut-il choisir pour avoir une erreur inférieure à 10^{-4}?

II : on cherche ici à retrouver les points de la quadrature de Gauss à trois noeuds sur $[-1, +1]$ pour le poids $w(x) = 1$. On note $\mathcal{P}_n$ l'e.v. des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$. Enfin on note

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Une famille de polynômes $(L_n)_{n\geq 1}$ est une base de Legendre si $d^\circ L_n = n$ et si $L_n \in \mathcal{P}_{n-1}^{\perp}$.

1) Soit P un polynôme. Montrer qu'il est orthogonal à $\mathcal{P}_2$ ssi

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = 0 \ \& \int_{-1}^{1} xp(x)dx = 0 \ \& \int_{-1}^{1} x^2p(x)dx = 0.$$

2) On suppose que $P(x) = a + bx + cx^2 + x^3 \in \mathcal{P}_3 \cap \mathcal{P}_2^{\perp}$. Montrer que

$$2a + \frac{2}{3}c = 0 \ \& \ \frac{2}{3}b + \frac{2}{5} = 0 \ \& \ \frac{2}{3}a + \frac{2}{5}c = 0.$$

3) En déduire que $L_3(x) = \lambda x(x - \sqrt{\frac{3}{5}})(x + \sqrt{\frac{3}{5}})$ où λ est une constante.

4) Évaluer numériquement par la méthode de Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{1} x^5 + 3x^4 dx.$$

III : on lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les 80 premières secondes l'accélération γ :

t (en s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
γ (en s/m^2)	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

Calculer la vitesse de la fusée à l'instant $t = 80s$ par la méthode des trapèzes puis par celle de Simpson.