I : on considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + y(x),\ 0 \le x \le 1; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que ce problème admet une unique solution sur $[0, 1]$.

b) Calculer la valeur approchée de $y(1)$ en appliquant le schḿea d'Euler avec un pas $h = 0.1$. Étudier l'erreur $e_n = y(x_n) - y_n$ et déterminer sa limite lorsque $h \to 0$. Que se passe-t-il si l'on perturbe la condition initiale?

c) Calculer la valeur approchée de $y(1)$ en utilisant le schéma d'Euler modifié avec un pas $h = 0.1$ ($y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n))$). Comparer les résultats obtenus avec la méthode d'Euler.

d) Calculer une valeur approchée de $y(1)$ en utilisant un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas $h = 0.1$. Comparer avec les résultats précédents.

e) Calculer une valeur approchée de $y(1)$ par la méthode d'Adams-Bashforth d'ordre 2 avec $h = 0.1$. Comparer.

f) Idem avec Adams-Moulton d'ordre 2.

II : On considère le problème de cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = z(x),\ y(0) = 2, \\ z'(x) = 2z(x) - y(x),\ z(2) = 1. \end{cases}$$

a) Mettre ce problème sous la forme canonique $u' = Au$.

b) Montrer qu'il a une solution unique sur $[0, 1]$ et la déterminer.

c) Déterminer une valeur approchée de $u(1)$ en appliquant le schéma d'Euler avec un pas $h = 0.1$.