ISITV, Première Année **APPROX, 2014**

24 Juin 2014.

Corrigé.

I :
a) En posant $y = x^m$, et en injectant dans (EH), il vient $x^m(m^3 - 2m^2 - m + 2) = 0$, soit $m^3 - 2m^2 - m + 2 = 0$.
b) $m = 1$ étant solution évidente, $m^3 - 2m^2 - m + 2 = (m-1)(m+1)(m-2)$, et donc une base de solutions de (EH) est $y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ y_3 = 1/x$.
c) On calcule de façon élémentaire $W(x) = 6/x$, $W_1(x) = -3$, $W_2(x) = 2/x$, $W_3(x) = x^2$. Sous forme canonique le second membre est $r(x) = 1/x^2$. On calcule

$$y_P(x) = y_1 \int \frac{W_1(x)}{W(x)} r(x)dx + y_2 \int \frac{W_2(x)}{W(x)} r(x)dx + y_3 \int \frac{W_3(x)}{W(x)} r(x)dx = -\frac{x}{2}\ln(x) - \frac{x}{4}.$$

d) $y_G(x) = Ax + Bx^2 + \frac{C}{x} - \frac{x}{2}\ln(x) - \frac{x}{4}$ somme de la solution générale de (EH) et de y_P.

II : on sait que pour la quadrature de Gauss associée on aura un ordre 4 soit

$$\begin{cases} \int_0^1 (t-x_1)(t-x_2)dt = 0 & = \frac{1}{3} - \frac{x_1+x_2}{2} + x_1x_2 \\ \int_0^1 t(t-x_1)(t-x_2)dt = 0 & = \frac{1}{4} - \frac{x_1+x_2}{3} + \frac{x_1x_2}{2} \end{cases}$$

On en déduit que si $p = x_1x_2$ et $s = x_1 + x_2$,

$$\begin{cases} 3s - 6p = 2 \\ 4s - 6p = 3 \end{cases}$$

Soit $s = 1$ et $p = 1/6$. En repassant aux variables x_1 et x_2 on déduit $6x_i^2 - 6x_i + 1 = 0$, $i = 1, 2$, et donc

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \text{ et } x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}.$$

Pour les poids associés, la formule étant exacte pour $f(t) = 1$ et $f(t) = t$, on en déduit

$$A_1 + A_2 = 1 \text{ et } A_1x_1 + A_2x_2 = \frac{1}{2},$$

ce qui se résoud en $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$.

III : par parité $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$, dernière intégrale dont on reconnaît qu'elle est du second type. La fonction $f(z) = (1+z^4)^{-1}$ présente 4 pôles simples en $e^{ik\pi/4}$, $k = 1, 3, 5, 7$. Seuls deux d'entre eux sont de partie imaginaire positive et donc

$$I = i\pi(Res(f, e^{i\pi/4}) + Res(f, e^{3i\pi/4})).$$

Les pôles sont simples donc les résidus se calculent directement. Un dessin d'un cercle trigonométrique permet de calculer facilement les différences du type $e^{ik\pi/4} - e^{ik'\pi/4}$, $k, k' = 1, 3, 5, 7$. Il s'ensuit que

$$Res(f, e^{i\pi/4}) = \frac{1}{4ie^{i\pi/4}} \text{ et } Res(f, e^{3i\pi/4}) = -\frac{1}{4ie^{3i\pi/4}}.$$

Donc $Res(f, e^{i\pi/4}) + Res(f, e^{3i\pi/4}) = \frac{e^{-i\pi/4} - e^{-3i\pi/4}}{4i} = \frac{\sqrt{2}}{4i}$, et $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.