SEATECH, Première Année **MATH - Examen 2014**

Durée deux heures - documents autorisés, calculettes interdites.

I : calculer $I = \int_\Delta \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ (*Indication* : on pourra penser à faire un changement de variables).

II : soit $B = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ et $a > 1$. Calculer $\int_B \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$ (*Indication* : passer en sphériques puis une fois θ éliminé, faire à ρ constant le changement de variable en ϕ : $t = \sqrt{\rho^2+a^2-2a\rho\sin\phi}$).

III : résoudre l'équation différentielle

$$(E) \ : \qquad y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

(*Indication* : pour trouver une solution particulière on pourra chercher $y_p(x) = Cxe^x$ comme le suggère le cours).

IV : soient $a, b > 0$. Montrer que $(x,y) \mapsto x^a y^b$ est un facteur intégrant de l'équation différentielle

$$(\tilde{E}) \ : \qquad (a+1)ydx + (b+1)xdy = 0.$$

Résoudre cette équation différentielle (on se contentera de donner une formulation implicite de la solution générale).