**I** : on passe en polaires :

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{\rho d\rho d\theta}{1+\rho^2} \\ &= 2\pi \left[\tfrac{1}{2}\ln(1+\rho^2)\right]_0^1 \\ &= \pi\ln(2). \end{aligned}$$

**II** : on suit les instructions données :

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]} \frac{\rho^2\cos\phi d\rho d\theta d\phi}{\sqrt{\rho^2+a^2-2a\rho\sin\phi}} \\ &= 2\pi\int_0^1 \rho^2\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos\phi d\phi}{\sqrt{\rho^2+a^2-2a\rho\sin\phi}}\right)d\rho \\ &= 2\pi\int_0^1 -\frac{\rho}{2a}\left(\int_{a+\rho}^{a-\rho} dt\right)d\rho \ \ \text{(on observe } dt = -\frac{a\rho\cos\phi}{\sqrt{\rho^2+a^2-2a\rho\sin\phi}}d\phi) \\ &= 2\pi\int_0^1 \frac{\rho^2}{a}d\rho = \frac{4\pi}{3a}. \end{aligned}$$

**III** : on résoud l'équation différentielle homogème associée. On passe par l'équation caract´ristique $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Le discriminant vaut 1 et les deux racines sont 1 et 2. La solution générale de l'équation homogème associée est donc $y(x) = ce^x + de^{2x}$.

Pour trouver une solution particulière on applique la méthode du cours : on cherche $y_p(x) = Cxe^x$, et en injectant dans l'équation on obtient

$$\begin{aligned} y(x) &= Cxe^x \\ y'(x) &= Cxe^x + Ce^x \\ y''(x) &= Cxe^x + 2Ce^x \ \ y''-3y'+y \ = \ Cxe^x(1-3+2) + Ce^x(2-3) = -Ce^x \\ &\Rightarrow \ y_p(x) = -xe^x. \end{aligned}$$

Pour la solution générale de $(E)$, il suffit d'ajouter une solution particulière de $(E)$ et la solution génórale de l'équation homogème associée.

**IV** : on vérifie que $\partial((a+1)x^a y^{b+1})/\partial y = (a+1)(b+1)x^a y^b = \partial((b+1)x^{a+1}y^b)/\partial x$ ce qui est vrai. On pose $du = (a+1)x^a y^{b+1}dx + (b+1)x^{a+1}y^b dy$, et la solution générale est alors $u(x,y) = c$ où

$$\begin{aligned} u(x,y) &= = \int(a+1)x^a y^{b+1}dx + \int((b+1)x^{a+1}y^b - \int\tfrac{\partial}{\partial y}(a+1)x^a y^{b+1}dx)dy \\ &= x^{a+1}y^{b+1}. \end{aligned}$$

Les solutions sont données sous forme implicite $u(x,y) = c$.