Interpolation et intégration numérique

Pr. Lacroix

SEATECH
Université de Toulon

12 mai 2014

Soit f une fonction de la variable réelle. On suppose que l'on connaît les valeurs de $(f(x_0), \ldots, f(x_n))$ et l'on cherche un polynôme P tel que

$$P(x_i) = f(x_i),\ 0 \leq i \leq n.$$

On appelle un tel polynôme un **polynôme d'interpolation** de f aux points $x_0, \ldots, x_n$.

Théorème

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un unique polynôme P de degré au plus n qui interpole f aux points $x_0, \ldots, x_n$ est que les abscisses $x_0, \ldots, x_n$ soient deux à deux distinctes.

Une première méthode pour construire un tel polynôme est de considérer la **base de Lagrange** associée aux points $x_0, \dots, x_n$:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)/(x_i - x_j),\ 0 \leq i \leq n,$$

et alors d'écrire

$$P = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i).$$

L'inconvénient ici est que les L_i dépendent de n et donc si l'on veut ajouter de nouveaux points d'interpolation il faut recommencer les calculs.

Une alternative est d'utiliser le **Schéma de Neville-Aitken** : appelons $T_k^{(i)}$ le polynôme de degré au plus k qui interpole f aux points $x_i, \ldots, x_{i+k}$. Alors on démontre qu'à partir des premières valeurs

$$T_0^{(i)} = f(x_i), 0 \leq i \leq n,$$

on peut calculer récursivement les autres polynômes $T_k^{(i)}$ par le schéma

$$T_{k+1}^{(i)}(x) = \frac{(x_{i+k+1} - x)T_k^{(i)}(x) - (x_i - x)T_k^{(i+1)}(x)}{x_{i+k+1} - x_i},$$

$0 \leq k \leq n-1,\ 0 \leq i \leq n-k-1.$

Schéma en arbre

Une autre méthode consiste à utiliser les **différences divisées** : elles sont définies récursivement par

$$\begin{cases} [x_i]_f = f(x_i) \\ [x_i, \ldots, x_{i+k}]_f = \dfrac{[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]_f - [x_i, \ldots, x_{i+k-1}]_f}{x_{i+k} - x_i} \end{cases}$$

et permettent ensuite d'exprimer le polynôme d'interpolation

$$\begin{aligned} P(x) &= [x_0]_f + (x - x_0)[x_0, x_1]_f + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]_f \\ &\quad + \ldots + (x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})[x_0, \ldots, x_n]_f . \end{aligned}$$

Cette méthode permet aussi d'ajouter des points d'interpolation facilement.

Dans le cas des points équidistants, on définit $\Delta^0 f(x_i) = f(x_i)$ puis $\Delta^{k+1} f(x_i) = \Delta^k f(x_{i+1}) - \Delta^k f(x_i)$. Alors puisque $x_i = x_0 + ih$, on a

$$k!h^k[x_i, \dots, x_{i+k}]_f = \Delta^k f(x_i),$$

et alors le polynôme d'interpolation P s'exprime à l'aide de la **formule de Newton**

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta f(x_0)}{1!h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} \\ &\quad + \dots + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n} \end{aligned}$$

On suppose que les points d'interpolation $x_0, \ldots, x_n$, parfois appelés les **noeuds**, appartiennent à un intervalle I oı̀la fonction f est définie.

Théorème

Si f est $n+1$ fois dérivable sur I, alors il existe $\xi(x) \in I$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{v(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x)), \; v(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Et donc

$$\max_{x \in I} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in I} |v(x)| \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|.$$

On observe donc que pour optimiser l'erreur indépendamment de f, on peut jouer sur le choix des points x_i.

On suppose, quitte à faire un changement de variable affine, que $I = [-1, +1]$. Pour minimiser $\max_{x \in [-1,+1]} |v(x)|$, il faut choisir pour x_i les zéros des **polynômes de Tchebytchev** :

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ n \geq 1.$$

On montre que

- T_n est de degré n et sur $[-1, +1]$, $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$;
- parmi les les polynômes de degré $n+1$ ayant un coefficient de plus haut degré égal à 1, et toutes leurs racines réelles et distinctes dans $[-1, 1]$, $T_n(x)/2^n$ est celui qui minimise $\max_{|x| \leq 1} |v(x)|$.
- le choix optimal des points d'interpolation consiste donc à prendre les racines de T_n qui sont les

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right),\ O \leq i \leq n.$$

Théorème

Quelles que soient les choix successifs $(x_i^{(n)})_{0\leq i\leq n}$, *il existe* f *continue sur* I *telle que*

$$\max_{x\in I}|f(x)-P_n(x)| \nrightarrow 0.$$

Quelle que soit f *continue sur* I, *il existe un choix de* $((x_i^{(n)})_{0\leq i\leq n})_{n\geq 1}$ *tel que*

$$\max_{x\in I}|f(x)-P_n(x)| \rightarrow 0.$$

Si f *a en outre une dérivée* $k^{\text{ième}}$ *continuesur* $[-1,+1]$, $k\geq 1$, *alors si l'on choisit les zéros des polynômes de Techbytchev,*

$$\max_{|x|\leq 1}|f(x)-P_n(x)| = o\left(\frac{\ln(n)}{n^k}\right).$$

On appelle **polynôme d'interpolation d'Hermite** de f aux noeuds $x_0, \dots, x_n$ un polynôme P de degr
'e au plus $2n+1$ satisfaisant à

$$P(x_i) = f(x_i),\ P'(x_i) = f'(x_i),\ 0 \leq i \leq n.$$

Théorème

Il existe un unique polynôme d'interpolation d'Hermite ssi $x_0, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts. Alors

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} H_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} V_i(x) f'(x_i),$$

avec

- $H_i(x) = (1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i))L_i^2(x)$;
- $V_i(x) = (x - x_i)^2 L_i^2(x)$;
- $L_i(x) = \prod_{j \neq i}(x - x_j)/(x_i - x_j)$.

Théorème

Si f est $2n+2$ fois continûment dérivable sur I, alors il existe $\xi(x) \in I$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{v^2(x)}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi(x)), \; v(x) = \prod_i (x - x_i).$$

$\diamondsuit$ **Interpolation par des fractions rationnelles** (différences réciproques) :

- $\rho_{-1}^{(i)} = 0$ et $\rho_0^{(i)} = f(x_i)$;
- $\rho_{k+1}^{(i)} = \rho_{k-1}^{(i+1)} + \frac{x_{i+k+1} - x_i}{\rho_k^{(i+1)} - \rho_k^{(i)}}$;
- $A_{-1}(x) = 1,\ A_0(x) = \rho_0^{(0)},\ B_{-1}(x) = 0,\ B_0(x) = 1$;
- $A_{k+1}(x) = (\rho_{k+1}^{(0)} - \rho_{k-1}^{(0)})A_k(x) + (x - x_k)A_{k-1}(x)$;
- $B_{k+1}(x) == (\rho_{k+1}^{(0)} - \rho_{k-1}^{(0)})B_k(x) + (x - x_k)B_{k-1}(x)$.

Alors $A_{2k},\ A_{2k+1},\ B_{2k+1}$ sont des polynômes de degré au plus k, et B_{2k} de degré au plus $k-1$ sous certaines conditions d'existence, et

$$R_n(x) = A_n(x)/B_n(x)$$

interpole f en $x_0, \ldots, x_{2n}$.

♣ **Interpolation par des fonctions quelconques : Mülbach** : on se donne $g_0(x), \ldots, g_n(x)$ et on cherche

$$g(x) = a_0 g_0(x) + \ldots + a_n g_n(x) \text{ telle que } f(x_i) = g(x_i),\ 0 \leq i \leq n.$$

On généralise l'algorithme de Neville-Aitken :

- $P_0^{(i)}(x) = f(x_i) g_0(x)/g_0(x_i)$, $i = 0 \ldots$;
- $g_{0,j}^{(i)}(x) = g_j(x_i) g_0(x)/g_0(x_i) - g_j(x)$, $i = 0 \ldots,\ j = 1 \ldots$;
- $P_{k+1}^{(i)}(x) = \dfrac{g_{k,k+1}^{(i+1)}(x) P_k^{(i)}(x) - g_{k,k+1}^{(i)}(x) P_k^{(i+1)}(x)}{g_{k,k+1}^{(i+1)}(x) - g_{k,k+1}^{(i)}(x)}$, $i, k \geq 0$;
- $g_{k+1,j}^{(i)}(x) = \dfrac{g_{k,k+1}^{(i+1)}(x) g_{k,j}^{(i)}(x) - g_{k,k+1}^{(i)}(x) g_{k,j}^{(i+1)}(x)}{g_{k,k+1}^{(i+1)}(x) - g_{k,k+1}^{(i)}(x)}$,

  $i, k \geq 0,\ j \geq k+2$.

Si aucune division par 0 n'apparaît, on aura

$$P(x) = P_n^{(0)}(x).$$

Plutôt que d'augmenter le degré du polynôme d'interpolation pour améliorer l'approximation de la fonction, on peut procéder en subdivisant l'intervalle I et en choisissant sur chacun des sous-intervalles un polynôme d'interpolation de faible degré, en demandant aux polynômes choisis ainsi qu'à leurs dérivées jusqu'à un certain ordre de se raccorder aux points de la subdivision. On parle alors de **splines**.

Les **polynômes de Bernstein** sont donnés par

$$B_k^n(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k},\ 0 \leq k \leq n.$$

Ils forment une base de $\mathbb{R}_n(X)$ et satisfont $\sum_k B_k^n(x) = 1$. Un polynôme de degré au plus n se représente donc sous la forme $\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(x)$: on l'appelle la **représentation de Bézier de** P, les coefficients étant les coefficients de Bézier de P.
On calcule les polynômes de Bernstein par récurrence grâce à la formule

$$B_k^{n+1}(x) = (1-x)B_k^n(x) + xB_{k-1}^n(x).$$

Si $x = (x_n)_{0 \leq n \leq p}$ est une suite, on pose $\Delta x = (x_{n+1} - x_n)_{0 \leq n \leq p-1}$.
Si $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{k=0}^n b_k B_k^n(x)$, alors si

- $b_0 = a_0$;
- $a_k^{(i)} = b_k$, $0 \leq k < i$;
- $a_i^{(i)} = -a_i / C_n^i$;

$$b_i = -\Delta^i a_0^{(i)}.$$

Les points $(\frac{i}{n}, b_i)$ sont les **points de Bézier** ou **points de contrôle** et la ligne polygonale qui les relie s'appelle le polygone de Bézier de P. Le déplacement de ces points permet de modifier l'allure de la courbe de P : utilisation en CAO.

L'algorithme de De Casteljau permet de calculer récursivement les valeurs et les dérivées de P en tout point :

- $b_{r,s}(x) = \sum_{i=r}^{s} b_i B_{i-r}^{s-r}(x)$;
- on a $b_{r,r}(x) = b_r$;
- $b_{r,s}(x) = (1-x)b_{r,s-1}(x) + xb_{r+1,s}(x), \ r < s.$

Alors

$$b_{0,n}(x) = P(x), \ P^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}\Delta^k b_{0,n}(x),$$

le Δ portant sur le premier indice.

Le représentation de Béziers et l'algorithme de De Casteljau s'étendent aux courbes paramétrées et aux surfaces.

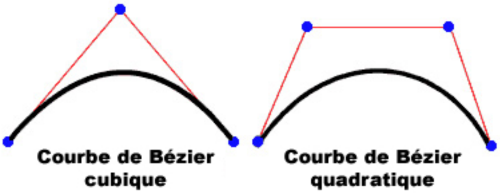
On appelle courbe de Bézier associée aux points $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée

$$t \mapsto \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) P_k.$$

Elle s'obtient récursivement par

- $B_0(P_k)(t) = P_k$;
- $B_k(P_i, \dots, P_{i+k})(t) = (1-t)B_{k-1}(P_i, \dots, P_{i+k-1})(t) + tB_{k-1}(P_{i+1}, \dots, P_{i+k})(t).$

Son image est contenue dans l'enveloppe convexe de $P_0, \dots, P_n$.



À l'aide de l'algorithme de De Casteljau, on peut interpoler une fonction f en des points d'un intervalle $[a, b]$, et sur chaque sous-intervalle ainsi défini, approcher f par une courbe de Bézier de faible degré, avec des conditions de raccord aux points d'interpolation. On peut aussi sur chacun des sous intervalles insérer des points de contrôle P_i qui permettent ensuite de modifier l'allure de la courbe en CAO tout en gardant les conditions de raccord et d'interpolation...

Soit $D = \{x_0, \dots, x_{n+1}\}$ une subdivision de $[a, b]$ ($x_0 = a,\ x_{n+1} = b$). Une fonction $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une **fonction spline de degré** k par rapport à D ssi elle est polynomiale de degré au plus k sur chaque sous intervalle de la subdivision, et de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $[a, b]$.
Elle est dite **spline naturelle de degré** $2k-1$ par rapport à D si c'est un polyôme de degré $2k-1$ au plus sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$, $1 \le i \le n-1$, et de degré au plus $k-1$ sur $[a, x_1[$ et $]x_n, b]$, et si elle est de classe $\mathcal{C}^{2k-2}$ sur $[a, b]$.
On montre que ceci équivaut à ce que

$$S(x) = p_0(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i (x - x_i)_+^{2k-1}$$

où p_0 est un polynôme de degré au plus $k-1$, $y_+ = \max(y, 0)$, et $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^j = 0$, $0 \le j \le k-1$.

Les splines cubiques correspondent à $k = 3$ ou $2k - 1 = 3$. Pour les splines cubiques naturelles, si $h_i = x_{i+1} - x_i$, $1 \leq i \leq n-1$, alors

$$\begin{aligned} S(x) = p_i(x) = & \frac{z_{i+1}}{h_i}(x - x_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 \\ & +(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}z_{i+1})(x - x_i) + (\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}z_i)(x_{i+1} - x) \end{aligned}$$

sur $[x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq n-1$, et S est affine sur $[a, x_1[$ et déterminée par y_1 et $p_1'(x_1)$, idem sur $[x_n, b]$.
La théorie se développe en produisant une base de splines pour une partition donnée et un degré donné, dites **B-splines**.

On va chercher à obtenir une valeur approchée de $I = \int_a^b f(x)w(x)dx$ où $w(x) > 0$ sur $[a, b]$. On peut procéder en remplaçant f par un de ses polynômes d'interpolation, on parle alors de **quadrature de type inerpolation**.
On subdivise $[a, b]$ en $n+1$ intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ et on note $P_n(x)$ le polynôme d'interpolation de f aux noeuds x_i. Alors $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$, et

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \int_a^b P_n(x)w(x)dx + \int_a^b E_n(x)w(x)dx.$$

Comme $P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x)$, il vient

$$I = I_n+R_n,\ I_n = \sum_{i=0}^n f(x_i) \underbrace{\int_a^b L_i(x)w(x)dx}_{A_i^{(n)}},\ R_n = \int_a^b E_n(x)w(x)dx.$$

Le calcul des $A_i^{(n)}$ peut se faire autrement, en résolvant le système de Van der Monde :

$$\sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} x_i^k = \int_a^b t^k dt, \; 0 \leq k \leq n-1.$$

Proposition

Si f est un polynôme de degré au plus n, alors $I_n = I$.

On dit que la quadrature est **exacte** pour les polynômes de degré $\leq n$. Son **ordre** est égal à l'entier $m+1$ le plus grand tel que la formule soit exacte pour tous les polynômes de degré $\leq m$.

Choisissons $h = (b-a)/n$ et $x_i = a + ih$. Il s'agit pour déterminer la quadrature associée de calculer les $A_i^{(n)}$.

Lorsque $w(x) = 1$ ces coefficients sont donnés dans des tables. On appelle les quadratures associées les **formules de Newton-Cotes**. Plusieurs questions se posent : celle de la **convergence** $I_n \to I$ pour certaines classes de fonctions f, et celle de la **stabilité** : supposons que l'ordinateur génère des erreurs et que l'on caclcule $\sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)}(f(x_i) + \epsilon_i)$, alors l'erreur vaut

$$\sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} \epsilon_i.$$

Définition

On dit que la quadrature est **stable** *si il existe M telle que pour tout n et ϵ_i,*

$$\sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} \epsilon_i| \leq M \max_{0 \leq i \leq n} |\epsilon_i|.$$

Théorème

Une CNS pour qu'une méthode de quadrature soit convergente sur $\mathcal{C}^\infty[a, b]$ est que

- *a) elle soit convergente lorsque f est un polynôme ;*
- *b) il existe M telle que pour tout n,*

$$\sum_{i=0}^{n} |A_i^{(n)}| \leq M.$$

Théorème

Une CNS de stabilité est que la condition b) précédente soit satisfaite.

Théorème

La méthode de Newton-Cotes n'est ni stable ni convergente sur $\mathcal{C}^\infty[a,b]$.

♣ **Méthode du trapèze**. Pour palier à la non convergence de Newton-Cotes, on écrit

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

et on calcule séparément chacune des intégrales par une approximation. C'est une méthode **composite**. Le méthode du trapèze consiste à calculer chacune de ces intégrales par la formule

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right).$$

Si l'on choisit les abscisses équidistantes, on obtient

$$I_n = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\right).$$

On montre que

$$\boxed{I_n - I = \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi),\ \xi \in [a,b]},$$

et $A_0^{(n)} = A_n^{(n)} = h/2$, $A_i^{(n)} = h$ si $1 \leq i \leq n-1$, et donc

$$\sum_{i=0}^{n} |A_i^{(n)}| = b - a.$$

Proposition

La méthode des trapèzes est stable et convergente.

On peut aussi appliquer sur chaque sous-intervalle la méthode de Simpson, qui est Newton-Cotes à trois noeuds :

$$\int_a^b g(t)dt \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) := \tilde{I}.$$

Alors l'erreur vaut $I - \tilde{I} = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{2880}(b-a)^5$. Elle est également stable et convergente.

On va chercher à accélérer la convergence dans la méthode des trapèzes. C'est l'objet de la méthode de Romberg.
On note $T(h)$ la valeur approchée de I par la méthode des trapèzes pour une subdivision de pas $h(=(b-a)/n)$.

- $T(h) = I + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots;$
- $T(h/2) = I + a_1 h^2/4 + \dots;$
- $(4T(h/2) - T(h))/3 + I + O(h^4)$...

Ceci inspire la méthode de Romberg :

- Poser $h_k = (b-a)/2^k$,
  $T_0^k = \frac{h_k}{2}(f(0) + 2(\sum_{i=1}^{2^k-1} f(a+ih_k)) + f(b))$;
- Pour $m \geq 1$, $T_m^j = (4^m T_{m-1}^{j+1} - T_{m-1}^j)/(4^m - 1)$
  (m accélérations).

Alors les approximations successives de I sont les T_m^0. L'erreur entre I et T_m^0 est de l'ordre de celle entre T_m^0 et T_{m+1}^0, en $0(h^{2m+2})$.

Théorème

Une CNS pour qu'une quadrature aux noeuds $x_0, \ldots, x_n$ puisse être d'ordre $\geq n+1+i$ est que

$$\int_a^b x^i v(x) w(x) dx = 0, \ v(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

On définit $< f, g >_w = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$ un produit scalaire. On va chercher à construire des bases de polynômes orthogonaux $\{v_0, v_1, \ldots\}$ où $v_k(x) = t_k x^k + s_k x^{k-1} + \ldots$, $t_k \neq 0$. Alors ces polynômes, lorsqu'ils ne sont pas constants, on des racines distinctes réelles dans $[a, b]$.

La **méthode de Gauss** consiste à interpoler aux racines de v_{n+1}. Elle est d'ordre $2n+1$, ce qui est maximal :

Proposition

Une quadrature à n noeuds est d'ordre $\leq 2n-1$.

Les polynômes orthogonaux $\{v_k\}$ ont des propriétés importantes qui permettent de les calculer :

Théorème

$$v_{k+1}(x) = (A_{k+1}x + B_{k+1})v_k(x) - C_{k+1}v_{k-1}(x), \; k \geq 0,$$

avec $v_{-1}(x) = 0$ *et* $v_0(x) = t_0$, $A_{k+1} = t_{k+1}/t_k$,
$B_{k+1} = A_{k+1}\left(\frac{s_{k+1}}{t_{k+1}} - \frac{s_k}{t_k}\right)$, $C_{k+1} = \frac{t_{k-1}t_{k+1}}{t_k^2}\frac{h_k}{h_{k-1}}$, *et*
$h_k = \int_a^b v_k^2(x)w(x)dx.$
Comme on a le choix sur t_k, *on prend* $t_k = 1$ *pour simplifier.*

Théorème

v_k et v_{k+1} n'ont pas de racines communes, et entre deux racines de v_k il y en a exactement une de v_{k+1}, et réciproquement.

Proposition

Soit Ω un ouvert connexe par arcs, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors si f a un zéro non isolé dans Ω, f y est identiquement nulle.

Pour finir de calculer la quadrature, une fois les v_k calculés par récurrence, il faut calculer les $A_i^{(n)}$:

Théorème

$$A_i^{(n)} = \frac{A_{n+1} h_n}{v'_{n+1}(x_i) v_n(x_i)}, \ 0 \leq i \leq n.$$

Théorème

Les quadratures de Gauss sont stables et convergentes.

$$R_n = I - I_n = \int_a^b v_{n+1}^2(x) \frac{f^{(2n+2)}(\xi(x))}{(2n+2)!} w(x) dx.$$

Nous allons maintenant passer en revue des familles classiques de polynômes orthogonaux, qui interviennent dans d'autres problèmes d'analyse, et qui sont définies par le choix de $w(x)$ et de $[a, b]$.

♣ **Polynômes de Legendre** P_n.

On choisit $w(x) = 1$ et $[a, b] = [-1, 1]$. Alors $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, et

$$\begin{cases} (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \ n \geq 1; \\ A_i^{(n)} = \dfrac{2(1-x_i^2)}{(n+1)^2 P_n^2(x_i)}, \ 0 \leq i \leq n; \\ R_n = \dfrac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(\xi), \ \xi \in [-1, 1]. \end{cases}$$

♣ **Polynômes de Laguerre L_n.**
On choisit $w(x) = \exp(-x)$ et $[a, b] = [0, +\infty[$. Alors $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, et

$$\begin{cases} (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x), \ n \geq 1; \\ A_i^{(n)} = \dfrac{[(n+1)!]^2}{x_i[L'_{n+1}(x_i)]^2}, \ 0 \leq i \leq n; \\ R_n = \dfrac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi), \ \xi \in [0, +\infty[. \end{cases}$$

♣ **Polynômes d'Hermite** H_n.

On choisit $w(x) = \exp(-x^2)$ et $[a, b] =]-\infty, +\infty[$. Alors $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, et

$$\begin{cases} H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \ n \geq 1; \\ A_i^{(n)} = \dfrac{2^{n+2}(n+1)!\sqrt{\pi}}{[H'_{n+1}(x_i)]^2}, \ 0 \leq i \leq n; \\ R_n = \sqrt{\pi}\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\xi), \ \xi \in]-\infty, +\infty[. \end{cases}$$

♣ **Polynômes de Tchebytchev de première espèce T_n.**
On choisit $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ et $[a,b] = [-1,+1]$. Alors $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$, et

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ n \geq 1; \\ x_i = \cos\left(\dfrac{2i+1}{2n+2}\pi\right),\ 0 \leq i \leq n; \\ A_i^{(n)} = \dfrac{\pi}{n+1},\ 0 \leq i \leq n; \\ R_n = \dfrac{2\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi),\ \xi \in [-1,+1]. \end{cases}$$